INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND ZWEITES HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 19.80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor K. v. Sanden, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Vertriebs-Vertretungen des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2
Lange, Maxwell & Springer S.A., 24, Rue des Ecoles, Paris (V^e^)
Lange, Maxwell & Springer A.G., Basel 15, Neuweiler Str. 53.

Inhalt:

Seite

Swida, Waldemar, Über die Restspannungen bei der elastisch-plastischen Biegung des krummen Stabes. Mit 13 Textabbildungen 77

Scholz, Norbert, Beiträge zur Theorie der tragenden Fläche. Mit 17 Textabbildungen 84

Koepcke, Werner, Zur Ermittlung der Einflußflächen und inneren Kräfte umfangsgelagerter Rechteckplatten. Mit 12 Textabbildungen 106

Kaufmann, Walter, Nachtrag zu „Die energetische Berechnung des induzierten Widerstandes" in Bd. XVII, S. 187, des Ing.-Arch. Mit 1 Textabbildung 139

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND ZWEITES HEFT 1950

Über die Restspannungen bei der elastisch-plastischen Biegung des krummen Stabes.

Von W. Swida.

1. Einleitung. In einer früheren Arbeit[1] über die elastisch-plastische Biegung eines gekrümmten Stabes wurde lediglich der ursprüngliche Belastungsvorgang betrachtet. Die bei der Entlastung entstehenden Restspannungen und deren Einfluß auf die gesamte Spannungsverteilung bei wiederholten Belastungen wurden dabei nicht untersucht. Dies ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

2. Spannungszustände. a) Grundannahmen. Wir betrachten einen gekrümmten Stab (Abb. 1), der durch die in der Ebene seiner geometrischen Achse wirkenden Momente M beansprucht wird. Es wird angenommen, daß in derselben Ebene die Symmetrieachse eines beliebigen Querschnittes liegt und der Stab vor dem Anbringen der Momente in spannungsfreiem Zustand war.

Abb. 1.

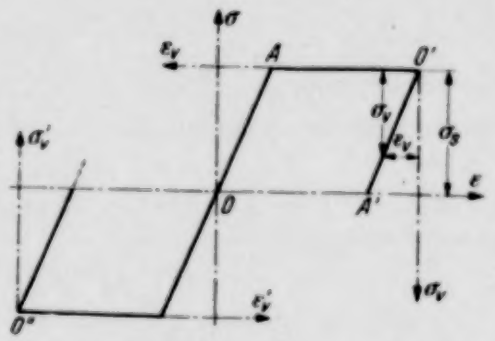

Abb. 2. Die idealisierte Spannungs-Dehnungslinie.

Wenn sich unter der Wirkung der Momente im Bereich der größten Spannungen die plastischen Zonen gebildet haben, so entstehen im Stab bei der Entlastung, d. h. bei der Verringerung der Momente, Restspannungen.

Zur Vereinfachung der Berechnung wird ein idealisiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb. 2) angenommen, bei dem die Entlastungslinie $O'A'$ parallel zur ursprünglichen Belastungslinie OA verläuft. Die Koordinaten σ_v und ε_v eines beliebigen Punktes der Geraden $O'A'$ sind die Beträge, um die sich die Spannung und Dehnung vermindern. Da auf diese Weise der Zusammenhang zwischen σ_v und ε_v durch das *Hooke*sche Gesetz ausgedrückt wird, können deren Werte nach den Formeln für die elastische Biegung ermittelt werden.

Weiterhin wollen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Vor der Entlastung bestand die plastische Zone nur an der konkaven Oberfläche.
2. Die plastische Zone bestand sowohl an der konkaven, als auch an der konvexen Oberfläche.

b) Erster Fall. Wie früher gezeigt wurde[2], entsteht bei der Belastung in einer beliebigen Faser der elastischen Zone im Abstand y von der Nullachse z die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{S_e + \dfrac{F_u y_1}{r - y_1}(k_u - r)} \frac{y}{r + y}. \tag{1}$$

Dabei ist S_e das statische Moment der Querschnittfläche der elastischen Zone in bezug auf die Nullinie z, F_u die Querschnittsfläche der plastischen Zone, r der Krümmungshalbmesser der

[1] *W. Swida*, Ing.-Arch. 16 (1948) S. 357.

[2] Ing.-Arch. 16 (1948) S. 365.

neutralen Fläche, y_1 der Abstand von der neutralen Achse bis zur plastischen Zone und k_u die Koordinate des Schwerpunktes der plastischen Zone (Abb. 3).

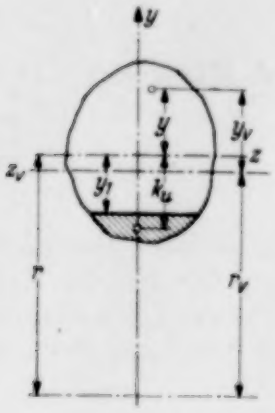

Abb. 3.

Die bei der Entlastung verschwindende Spannung in derselben Faser ergibt sich auf Grund der oben angeführten Annahmen zu

$$\sigma_v = \frac{M}{S}\,\frac{y_v}{r_v+y_v}. \tag{2}$$

Die Formel (2) ist der bekannte Ausdruck für die Spannungen bei der elastischen Biegung. Hierbei ist z_v die Nullinie bei der elastischen Biegung, S das statische Moment des ganzen Querschnittes in bezug auf die Nullachse z_v, r_v der Krümmungshalbmesser der neutralen Fläche bei der elastischen Biegung, y_v der Abstand der zu betrachtenden Faser von der z_v-Achse. Die Ermittlung von r_v und S kann auf bekanntem Wege durchgeführt werden. Bei vollständiger Entlastung ist für M in (1) und (2) derselbe Wert einzusetzen.

Die Restspannungen in der elastischen Zone nach vollständiger Entlastung werden

$$\sigma_0 = \frac{M}{S_e + \dfrac{F_u y_1}{r-y_1}(k_u-r)}\,\frac{y}{r+y} - \frac{M}{S}\,\frac{y_v}{r_v+y_v}. \tag{3}$$

In der plastischen Zone ergibt sich die Restspannung zu

$$\sigma_0 = -\sigma_s - \frac{M}{S}\,\frac{y_v}{r_v+y_v}, \tag{4}$$

wobei σ_s die Fließgrenze ist.

Bei Verwendung der Formeln (3) und (4) sind die Vorzeichen der Koordinaten y und y_v zu berücksichtigen.

Die auf diese Weise gefundenen Restspannungen müssen die folgenden Gleichgewichtsbedingungen befriedigen:

$$\int_{(F)} \sigma_0\,dF = 0, \qquad \int_{(F)} \sigma_0 y\,dF = 0, \tag{5}$$

wobei F die gesamte Querschnittsfläche ist. Bei der Ermittlung der Spannungen nach (3) und (4) kann man die Gleichungen (5) zur Kontrolle benützen.

Für einen rechteckigen Querschnitt (Abb. 4) wird

$$S_e = \frac{b}{2}(y_2^2-y_1^2), \qquad r = c-y_2, \qquad F_u(k_u-r) = \frac{b}{2}[a^2-(r-y_1)^2].$$

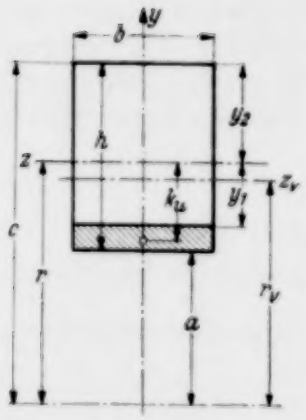

Abb. 4.

Die Abstände y_1 und y_2 lassen sich nach den Formeln bestimmen

$$y_1 = \frac{v-t}{2}, \qquad y_2 = \frac{v+t}{2}. \tag{6}$$

Hierbei sind v und t aus den Gleichungen zu errechnen:

$$t = \frac{v[A+b(c-v)^2]}{A+b(c^2-v^2)}, \tag{7}$$

$$\ln\frac{c}{c-v} = \frac{v}{c-v}\left[1-\frac{bhv}{A+bc^2}\right], \tag{8}$$

wobei

$$A = \frac{2M}{\sigma_s} - ba^2$$

ist. Zur Ermittlung der Restspannungen sind die Gleichungen (8), (7), (6) und (3) der Reihe nach zu benützen.

c) Zweiter Fall. Für diesen Fall lassen sich die Restspannungen in der elastischen Zone folgendermaßen ausdrücken:

$$\sigma_0 = \frac{M}{S_e + \dfrac{y_1}{r-y_1}[F_u(k_u-r)+F_0(k_0+r)]}\,\frac{y}{r+y} - \frac{M}{S}\,\frac{y_v}{(r_v+y_v)}, \tag{9}$$

wobei F_u bzw. F_0 die Querschnittsflächen der unteren bzw. der oberen plastischen Zone (Abb. 5) und k_u bzw. k_0 die Koordinaten ihrer Schwerpunkte sind. Die anderen Bezeichnungen sind dieselben wie im ersten Fall.

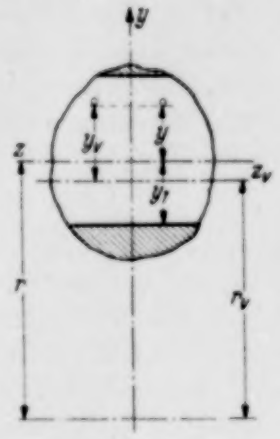

Abb. 5.

Für die plastische Zone werden die Restspannungen

$$\sigma_0 = \pm\,\sigma_s - \frac{M}{S}\,\frac{y_v}{r_v + y_v}\,. \tag{10}$$

Das positive Vorzeichen bezieht sich auf die obere, das negative Vorzeichen auf die untere Zone.

Für den rechteckigen Querschnitt (Abb. 6) ist

$$S_v = \frac{b}{2}\,(y_2^2 - y_1^2)\,,$$

$$F_u(k_u - r) = \frac{b}{2}\,[a^2 - (r - y_1)^2]\,,$$

$$F_0(k_0 + r) = \frac{b}{2}\,[c^2 - (r + y_2)^2]\,.$$

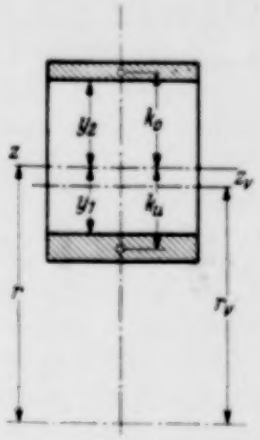

Abb. 6.

Die Abstände y_1, y_2 und r bestimmen sich nach den Formeln

$$y_1 = \frac{v - t}{2}\,, \qquad y_2 = \frac{v + t}{2}\,, \qquad r = \frac{2\,y_1\,y_2}{y_2 - y_1}\,, \tag{11}$$

wobei v und t aus den Gleichungen

$$t = \frac{v^2}{\xi}\,, \qquad v = \sqrt{\xi^2 - \mu}\,, \tag{12), (13}$$

$$\xi^3 - 4\gamma\,\xi^2 + \mu\gamma = 0\,, \tag{14}$$

zu ermitteln sind. Dabei ist

$$\mu = 2\left(a^2 + c^2 - \frac{2\,M}{b\,\sigma_s}\right), \qquad \gamma = \frac{\mu}{3\,(a + c)}\,.$$

Zur Ermittlung von σ_0 sind (14), (13), (12), (11) und (9) der Reihe nach zu benützen. Die Gleichgewichtsbedingungen (5) müssen dabei auch befriedigt werden.

d) Grenzfall. Der Grenzfall, bei dem sich die Plastizierung vor der Entlastung auf den ganzen Querschnitt erstreckt, erfordert eine besondere Untersuchung. Bestimmt man auch in diesem Fall die Restspannungen nach der Formel (10) und betrachtet r_v und S als Krümmungshalbmesser der neutralen Fläche und als statisches Moment des gesamten Querschnittes, so erhält man die in Abb. 7 dargestellte Restspannungslinie. Dann würden aber die Spannungen im Bereich $m\ n\ m'\ n'$ die Fließgrenze σ_s übersteigen, was bei der angenommenen Spannungs-Dehnungs-Linie (Abb. 2) nicht möglich ist. Es bleibt daher nur die Annahme übrig, daß die Zone $m\ n\ m'\ n'$ von der Höhe η nicht an der Arbeit bei der Entlastung teilnimmt, d. h. daß sie die bei der Belastung erreichte Größe ihrer Spannungen σ_s als konstante Größe beibehält. Als obere Grenze der Zone $m\ n\ m'\ n'$ muß die Gerade $m\,n$ betrachtet werden, die den Querschnitt in zwei flächenmäßig gleichgroße Teile zerlegt. Die untere Grenze $m'\ n'$ kann als neutrale Achse eines Querschnittes angesehen werden, der an Stelle des Bereiches $m\ n\ m'\ n'$ einen Ausschnitt hat.

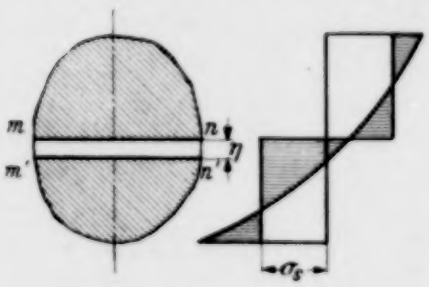

Abb. 7.

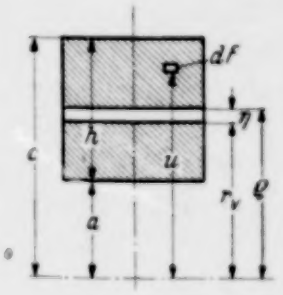

Abb. 8.

Für den rechteckigen Querschnitt (Abb. 8) läßt sich dann die untere Grenze nach der Gleichung bestimmen:

$$r_v = \frac{F}{\int\limits_{(F)} \frac{dF}{u}} = \frac{c - a - \eta}{\int\limits_a^{r_v} \frac{du}{u} + \int\limits_{\varrho}^{c} \frac{du}{u}} = \frac{c - 3\,a + 2\,r_v}{2 \ln \frac{c\,r_v}{a\,\varrho}}\,, \tag{15}$$

wobei ϱ der Krümmungshalbmesser der Stabachse ist. Nach Ermittlung von r_v aus (15) kann man auf Grund von (10) die Restspannungen berechnen.

Auf diese Weise muß bei der Entlastung eines krummen Stabes eine innere plastische Zone entstehen, wenn das Moment bei der Belastung gleich oder nahe dem Grenzwert ist.

Bei der Berechnung der Spannungen nach Formel (10) ist darauf zu achten, daß das Moment M, welches bei der Belastung vom ganzen Querschnitt aufgenommen wurde, bei der Entlastung in seiner ganzen Größe von jenem Querschnittsteil zurückgewonnen wird, der in Abb. 7 und 8 schraffiert ist. Infolgedessen müssen sich die Restspannungen in den einzelnen Punkten des Querschnittes etwas von den Spannungen unterscheiden, die man auf Grund des Diagramms der Abb. 7 erhalten würde. Das tatsächliche Spannungsdiagramm für ein Zahlenbeispiel ist weiter unten in Abb. 12 dargestellt.

e) Exakte Werte für die Restspannungen. Man kann die genaueren Werte für die Restspannungen in einem krummen Stab mit rechteckigem Querschnitt und kreisförmiger Achse leicht ermitteln, wenn man die früher abgeleiteten exakten Formeln[1] für die plastische Biegung und die bekannten Ausdrücke der Elastizitätstheorie[2] für die elastische Biegung benützt. Hierbei können nicht nur die tangentialen Restspannungen σ_t^0, sondern auch die radialen σ_r^0 bestimmt werden. Wenn die plastische Zone vor der Entlastung nur an der konkaven Oberfläche bestand, so ist in der elastischen Zone

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t^0 = &-\frac{\sigma_s}{N\varrho r^2}\left\{b^2 r^2\left[(2\varrho-a)\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)\right]+\varrho^2\left[a\left(r^2\ln\frac{\varrho}{r}-b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)+\right.\right.\\ &\left.\left.+b^2(a-\varrho)-\varrho r^2\right]\right\}-\frac{4M}{N'}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}+b^2-a^2\right),\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^0 = &-\frac{\sigma_s}{N\varrho r^2}\left\{b^2 r^2\ln\frac{b}{r}(a-2\varrho)+\varrho^2\left[a\left(r^2\ln\frac{\varrho}{r}+b^2\ln\frac{b}{\varrho}\right)+\right.\right.\\ &\left.\left.+(\varrho-a)(b^2-r^2)\right]\right\}-\frac{4M}{N'}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}\right),\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

wobei

$$N=b^2-\varrho^2-2b^2\ln\frac{b}{\varrho}, \qquad N'=(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$$

ist.

In der plastischen Zone wird

$$\sigma_t^0=-\sigma_s-\frac{4M}{N'}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}+b^2-a^2\right), \tag{18}$$

$$\sigma_r^0=-\sigma_s\left(1-\frac{a}{r}\right)-\frac{4M}{N'}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}\right). \tag{19}$$

Dabei ist a der Halbmesser der konkaven Oberfläche, b der Halbmesser der konvexen Oberfläche, r der Abstand vom Krümmungsmittelpunkt bis zum beliebigen Punkt des Querschnittes und ϱ der Krümmungshalbmesser der Grenzfläche zwischen der elastischen und plastischen Zone.

Wenn sich vor der Entlastung die plastischen Zonen sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Oberfläche gebildet haben, so entstehen nach der Entlastung in der elastischen Zone die Restspannungen

$$\left.\begin{aligned}\sigma_t^0 = &-\frac{\sigma_s}{N_1\varrho r^2}\left\{\varrho_1^2 r^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b\varrho_1}{r^2}+2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{r}{\varrho}-2\right)+a\left(1+\ln\frac{r}{\varrho_1}\right)+\right.\right.\\ &+a\varrho^2\left[r^2\ln\frac{r}{\varrho}+\varrho_1^2\left(\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}-1\right)\right]+\varrho^3\left[r^2+\varrho_1^2\left(1-\ln\frac{b}{\varrho_1}\right)\right]\Big\}-\\ &\left.-\frac{4M}{N'}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}+b^2-a^2\right),\right.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^0 = &-\frac{\sigma_s}{N_1\varrho r^2}\left\{\varrho_1^2 r^2\left[\varrho\left(\ln\frac{{\varrho_1}^3}{br^2}+2\ln\frac{b}{\varrho_1}\ln\frac{r}{\varrho}\right)+a\ln\frac{r}{\varrho_1}\right]+\right.\\ &+\varrho^2\varrho_1^2\left[\varrho\left(\ln\frac{b}{\varrho_1}-1\right)+a\left(1-\ln\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]+\varrho^2 r^2\left[a\left(\ln\frac{r}{\varrho}-1\right)+\varrho\right]\Big\}-\\ &\left.-\frac{4M}{N'}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}\right);\right.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$N_1=\varrho^2-\varrho_1^2+2\varrho_1^2\ln\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

---

[1] Ing.-Arch. 16 (1948) S. 361.

[2] Siehe z. B. *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, S. 60, New York und London, 1934, oder *A. Föppl* und *L. Föppl*, Drang und Zwang, 1. Bd., S. 305, München 1924.

wobei ϱ und ϱ_1 die Krümmungshalbmesser der Grenzflächen zwischen der elastischen und plastischen Zone sind. Die Spannungen in der unteren plastischen Zone können auch in diesem Fall nach (18) und (19) bestimmt werden.

In der oberen plastischen Zone ergeben sich die Restspannungen zu

$$\sigma_t^0 = \sigma_s\left(1-\ln\frac{b}{r}\right) - \frac{4M}{N'}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right), \tag{22}$$

$$\sigma_r^0 = -\sigma_s\ln\frac{b}{r} - \frac{4M}{N'}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r}\right). \tag{23}$$

f) Restformänderungen. Nun ermitteln wir die Restformänderungen in einem krummen Stab nach der Entlastung. Wir betrachten ein Element des Stabes (Abb. 9), bei dem unter der Wirkung der Momente eine plastische Zone an der konkaven Oberfläche auftritt. Wie schon früher gezeigt wurde, ist die Zunahme des Winkels $d\varphi$ unter der Wirkung des Momentes M

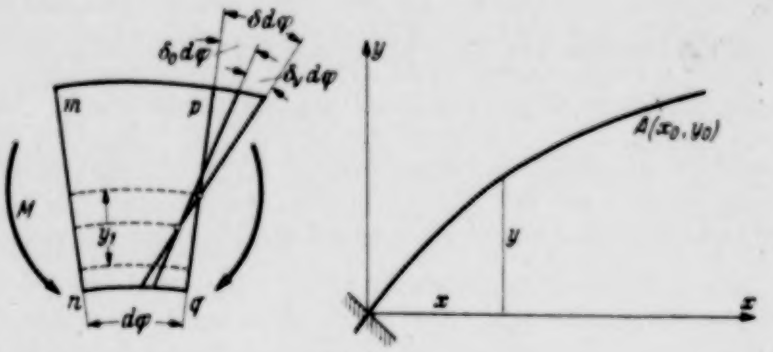

Abb. 9.

$$\delta d\varphi = \frac{M\,ds}{E\varrho\left[S_e + \dfrac{F_u y_1}{r-y_1}(k_u - r)\right]}.$$

Hier ist ϱ der Krümmungshalbmesser der Stabachse.

Die Verringerung des Winkels $d\varphi+\delta d\varphi$ bei der Entlastung wird

$$\delta_v d\varphi = \frac{M\,ds}{E\varrho S}.$$

Dann läßt sich die Reständerung des Winkels $d\varphi$ folgendermaßen darstellen:

$$\delta_0 d\varphi = \delta d\varphi - \delta_v d\varphi = \frac{M\,ds}{E\varrho}\left[\frac{1}{S_e + \dfrac{F_u y_1}{r-y_1}(k_u - r)} - \frac{1}{S}\right]. \tag{24}$$

Aus Abb. 9 ist zu ersehen, daß die Drehachsen für den Querschnitt pq bei Belastung und Entlastung verschieden sind.

Wenn die plastische Zone vor der Entlastung sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Fläche vorhanden ist, so wird

$$\delta_0 d\varphi = \frac{M\,ds}{E\varrho}\left\{\frac{1}{S_e + \dfrac{y_1}{r-y_1}\left[F_u(k_u - r) + F_0(k_0 + r)\right]} - \frac{1}{S}\right\}. \tag{25}$$

Unter Verwendung eines schon früher angegebenen Verfahrens[1] erhalten wir folgenden Näherungswert für die horizontale Restverschiebung eines beliebigen Punktes A des gekrümmten Stabes (Abb. 9):

$$\left.\begin{aligned} f_h^0 = &\sum_{(s_k)}\int \frac{M}{E\varrho}\left[\frac{1}{S_e + \dfrac{F_u y_1}{r-y_1}(k_u - r)} - \frac{1}{S}\right](y_0 - y)\,ds + \\ &+ \sum_{(s_k')}\int \frac{M}{E\varrho}\left\{\frac{1}{S_e + \dfrac{y_1}{r-y_1}\left[F_u(k_u - r) + F_0(k_0 + r)\right]} - \frac{1}{S}\right\}(y_0 - y)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dabei stellt s_k die Länge eines Stababschnittes dar, bei dem vor der Entlastung die plastische Zone nur an der konkaven Oberfläche entstand; s_k' ist die Länge eines Stababschnittes, bei welchem die plastische Zone vor der Entlastung sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Oberfläche vorhanden ist. Um den Ausdruck für die vertikale Restverschiebung des Querschnittes A zu erhalten, muß man in (26) (y_0-y) durch (x_0-x) ersetzen. Der Restdrehwinkel des Querschnittes A ergibt sich, wenn man in (26) (y_0-y) durch 1 ersetzt.

[1] Ing.-Arch. 16 (1948) S. 366.

3. Beispiele. a) Erstes Beispiel. Ein gekrümmter Stab mit rechteckigem Querschnitt mit $h=10$ cm, $b=5$ cm, $a=10$ cm, $c=20$ cm, wurde vor der Entlastung durch die Momente $M=2\,tm$ beansprucht, die die Bildung einer plastischen Zone an der konkaven Oberfläche hervorgerufen haben. Die Fließgrenze σ_s beträgt 2400 kg/cm². Auf Grund von (8), (7) und (6) ergibt sich:

$$r=9{,}1\text{ cm},\quad t=1{,}9\text{ cm},\quad y_1=3{,}6\text{ cm},\quad y_2=5{,}5\text{ cm}\text{ und }r=14{,}50\text{ cm}.$$

Unter Berücksichtigung dessen, daß $r_v=\dfrac{h}{\ln\frac{c}{a}}=14{,}43$ cm ist, erhält man das Gesetz der Änderung der Restspannungen:

$$\sigma_0=\frac{7260\,y}{14{,}50+y}-\frac{6993\,y_v}{14{,}43+y_v}.$$

Im Bereich der vor der Entlastung vorhandenen plastischen Zone ist

$$\sigma_0=-2400-\frac{6993\,y_v}{14{,}43+y_v}.$$

In Abb. 10 stellt die Linie ABD den Spannungsverlauf bei der Belastung und die Kurve $A'D'$ den Verlauf der bei der Entlastung verschwindenden Spannungen dar. Die waagerechten Abstände zwischen den Kurven sind die Restspannungen.

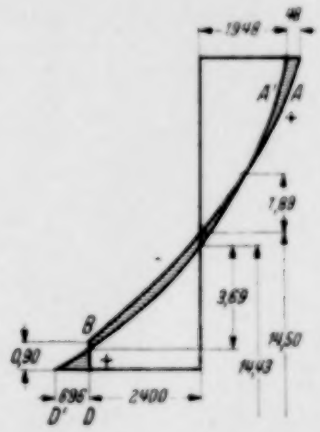

Abb. 10. Das Diagramm der Restspannungen für $M=$ **2,0 tm.**

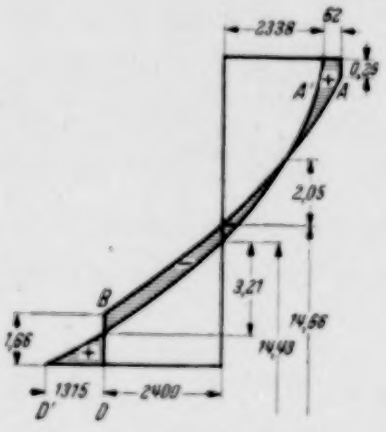

Abb. 11. Das Spannungsdiagramm für $M=$ **2,4 tm.**

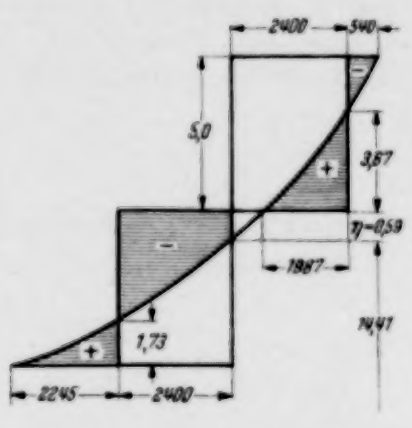

Abb. 12. Das Spannungsdiagramm für das Grenzmoment $M=$ **3,0 tm.**

b) Zweites Beispiel. Derselbe Stab wurde vor der Entlastung durch die Momente $M=2{,}4\,tm$ beansprucht. Dabei ist eine plastische Zone sowohl an der konkaven als auch an der konvexen Oberfläche entstanden. Mit Hilfe von (14), (13), (12) und (11) ergibt sich

$$\xi=31{,}4\text{ cm},\qquad r=8{,}08\text{ cm},\qquad t=2{,}08\text{ cm},$$
$$y_1=3{,}0\text{ cm},\qquad y_2=5{,}08\text{ cm},\qquad r=14{,}66\text{ cm}.$$

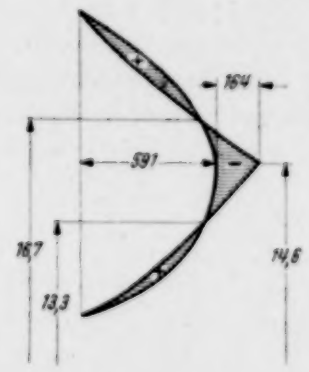

Abb. 13. Die Verteilung der radialen Restspannungen unter der Wirkung des Grenzmomentes.

Im Bereich der vor der Entlastung vorhandenen elastischen Zone entstehen die Restspannungen (9)

$$\sigma_0=\frac{9340\,y}{14{,}66+y}-\frac{8392\,y_v}{14{,}43+y_v}.$$

Für die elastischen Zonen ergibt sich nach (10)

$$\sigma_0=\pm 2400-\frac{8392\,y_v}{14{,}43+y_v}.$$

In Abb. 11 ist der Verlauf der Spannungen bei der Belastung durch die Linie ABD und der bei der Entlastung verschwindenden Spannungen durch die Kurve $A'D'$ dargestellt.

Für das Grenzmoment ergibt sich nach (15) und (10)

$$r_v=14{,}41\text{ cm},\qquad \sigma_0=\pm 2400-\frac{10510\,y_v}{14{,}41+y_v}.$$

Dabei ist

$$M_s=\frac{bh^2}{4}\,\sigma_s=3\text{ tm}.$$

In Abb. 12 ist das Diagramm von σ_0 für den Grenzfall gezeigt. Das Diagramm der radialen Restspannungen σ_r^0 bei der Wirkung des Grenzmomentes ist in Abb. 13 dargestellt. Sie wurden nach (19) und (23) errechnet. Man kann sich leicht überzeugen, daß für alle behandelten Beispiele die Gleichgewichtsbedingungen (5) befriedigt werden.

4. Der Einfluß der wiederholten Belastungen. Jetzt nehmen wir an, daß der gekrümmte Stab, in dem infolge der ursprünglichen Belastung und der nachfolgenden Entlastung die Restspannungen entstanden sind, wiederum durch die Momente von gleichem Richtungssinn wie die ursprünglichen beansprucht wird.

Bei Betrachtung eines beliebigen Spannungsdiagramms (Abb. 10, 11, oder 12) ist leicht zu erkennen, daß infolge des Vorhandenseins der Restspannungen der Vorgang der Formänderung bei dieser wiederholten Belastung so lange sich vollkommen elastisch vollziehen wird, bis die Biegungsmomente die bei der ursprünglichen Belastung vorhanden gewesene Größe erreichen. Bei einer weiteren Zunahme der Momente muß die Plastizierung gleichzeitig in allen Fasern entstehen, die bei der ursprünglichen Belastung in der plastischen Zone lagen. Wenn man auf diese Weise durch eine vorübergehende Belastung und nachfolgende Entlastung Restspannungen in einem gekrümmten Stab hervorruft, so kann man bei wiederholter Belastung von gleicher Richtung wie die ursprüngliche die Größe des Biegungsmomentes, das der Stab ohne Auftreten plastischer Formänderungen aufnehmen kann, und bei dessen Wirkung das Material sich noch vollkommen elastisch verformt, wesentlich erhöhen. Nach ausgeführten Berechnungen beträgt diese Erhöhung des „elastischen" Grenzmomentes 25 v. H. für das erste Beispiel, 50 v. H. für das zweite Beispiel und 87 v. H. für den Fall der Belastung durch das Grenzmoment.

Wenn der Richtungssinn der Momente bei wiederholter Belastung entgegengesetzt ihrem ursprünglichen Richtungssinn ist, so können (beim Vorhandensein erheblicher Restspannungen) schon bei kleinen Werten der Momente plastische Formänderungen in den äußersten Fasern des Querschnittes auftreten. So genügt z. B. für den in Abb. 12 dargestellten Fall ein Moment von 0,07 M_e, um das Entstehen der plastischen Formänderung an der konkaven Oberfläche hervorzurufen.

(Eingegangen am 21. März 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Waldemar Swida*, (17a) Karlsruhe, Stuttgarter Straße 21.

Beiträge zur Theorie der tragenden Fläche*.

Von N. Scholz.

1. Einleitung. Die *Prandtl*sche Theorie der tragenden Linie ersetzt eine Tragfläche durch einen einzigen Wirbel längs Spannweite, dessen Zirkulation stetig mit der Breitenkoordinate der Fläche veränderlich ist. Hierbei wird die Strömungsbedingung, daß nämlich die resultierende Anströmungsrichtung tangential zur Profilkontur verläuft, nur am Ort der tragenden Linie selbst erfüllt. Für eine Tragfläche, deren Tiefe von gleicher Größenordnung ist wie die Spannweite, ist diese Bedingung unzureichend und ein Übergang zur tragenden Fläche notwendig. Die exakte Theorie der tragenden Fläche erfüllt die Strömungsbedingung in der ganzen durch den Flächenumriß begrenzten Ebene. Sie ist für das ebene Problem, d. h. unendliche Spannweite, von *W. Birnbaum*[1] entwickelt und von *H. Glauert*[2] in mathematischer Hinsicht vervollständigt worden. *H. Blenk*[3] versuchte, auch das räumliche Problem der tragenden Fläche zu lösen, indem er zu den *Birnbaum*schen Normalfällen für die Zirkulationsverteilung längs Tiefe noch eine stetige Zirkulationsverteilung längs Spannweite in Form einer Potenzreihe hinzunahm. Die mathematische Durchführung bereitet jedoch sehr erhebliche Schwierigkeiten. *K. Wieghardt*[4] vereinfachte das Problem zunächst dadurch, daß er für die Zirkulation längs Spannweite die elliptische Verteilung annahm und nur die Verteilung längs Tiefe freiließ. Die Strömungsbedingung wurde dabei nur auf der Flächenmittellinie erfüllt. Unter Hinzunahme weiterer Glieder für Zirkulation längs Spannweite wird dieses Verfahren von *J. Ginzel*[5] verallgemeinert. Ferner geht ein von *K. Wieghardt* durchgeführter Schritt dahin, die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung in einzelne diskrete Wirbellinien zusammenzufassen und die Strömungsbedingung jeweils in der Mitte zwischen zwei Wirbellinien zu erfüllen. *V. M. Falkner*[6] ging bei der Behandlung des Problems soweit, daß er nicht nur die Zirkulationsverteilung in Tiefenrichtung in diskrete Einzelwirbel aufteilte, sondern nun auch noch die Verteilung längs Spannweite unstetig machte, indem er sie treppenförmig annahm. Die Unzweckmäßigkeit dieses Verfahrens dürfte aber allein daraus hervorgehen, daß damit das sonst stetige Abwindfeld hinter dem Flügel entsprechend den entstehenden Hufeisenwirbeln eine Anzahl von Unstetigkeitsstellen erhält, die die Berechnung des Abwindes recht unsicher machen.

Auf Grund dieser Arbeiten erscheint eine Behandlung des räumlichen Problems der tragenden Fläche aussichtsreich bei Aufteilung der stetigen Wirbelbelegung längs Flächentiefe in diskrete Einzelwirbel, aber unter Beibehaltung einer stetigen Zirkulationsverteilung längs Spannweite, die in Form einer *Fourier*schen Reihe mit freibleibenden Koeffizienten angesetzt wird. Dabei soll zunächst im ebenen Fall durch Vergleich mit den exakten *Birnbaum*schen Lösungen nachgewiesen werden, unter welchen Bedingungen durch die Zusammenfassung der stetigen Wirbelbelegung in diskrete Einzelwirbel eine brauchbare Ersatzmethode geschaffen wird. Zumindest muß hierbei für Gesamtauftrieb und Gesamtmoment der Fläche eine Übereinstimmung gefordert werden, die, soweit sie nicht exakt ist, doch schon bei geringer Anzahl von Streifen wenigstens gute Näherungen liefert. Ferner ist am Grenzübergang vom räumlichen zum ebenen Fall zu untersuchen, wie viele Glieder der *Fourier*schen Reihe für die Zirkulationsverteilung längs Spannweite notwendig sind, um den richtigen Gesamtauftrieb der Fläche zu erhalten.

Der größte Teil der für jeden Einzelfall zu leistenden Arbeit besteht in der Ermittlung der Koeffizienten des Gleichungssystems für die Zirkulationsverteilung. Diese Koeffizienten stellen physikalisch den Abwind in gewissen fest gewählten Aufpunkten dar, der ein für allemal berechnet werden kann. Eine wesentliche Abkürzung der Rechenarbeit für den Einzelfall ist dadurch zu erreichen, daß dieses Abwindfeld in Form von „Abwindtafeln" universell berechnet wird.

---

* Gekürzte Wiedergabe des theoretischen Teils der Dissertation Braunschweig 1949. (Hauptberichter: Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter: Prof. Dr. Ing. *C. Pfleiderer*). Der experimentelle Teil befindet sich in Forschg. Ing.-Wes. 16 (1949/50) S. 85.

[1] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 290.

[2] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie; deutsch von *H. Holl*. Berlin 1926.

[3] *H. Blenk*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 36.

[4] *K. Wieghardt*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 257.

[5] *I. Ginzel*, Jahrbuch der Deutschen Luftfahrtforschung 1940, S. I 238.

[6] *V. M. Falkner*, A.R.C. Techn. Rep. a. Mem. Nr. 1910 (1943).

2. Die Birnbaumsche Theorie der tragenden Wirbelfläche. Zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie hat *W. Birnbaum* die Vorstellung eingeführt, die Fläche durch eine kontinuierliche Wirbelbelegung längs Profilsehne zu ersetzen und kommt somit zur Vorstellung der tragenden Wirbelfläche. *Birnbaum* behandelt drei Normalfälle (Abb. 1), für die sich Wirbelbelegung und Abwind leicht angeben lassen. Durch *H. Glauert* wurde die mathematische Formulierung der Theorie mit Hilfe der Methode der *Fourier*schen Reihen in eine übersichtliche Form gebracht, indem er für die Wirbelbelegung längs Flächentiefe die Reihe

$$\gamma(\varphi) = V\left(C_0 \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + C_1 \sin\varphi + C_2 \sin 2\varphi + \cdots\right) \tag{2,1}$$

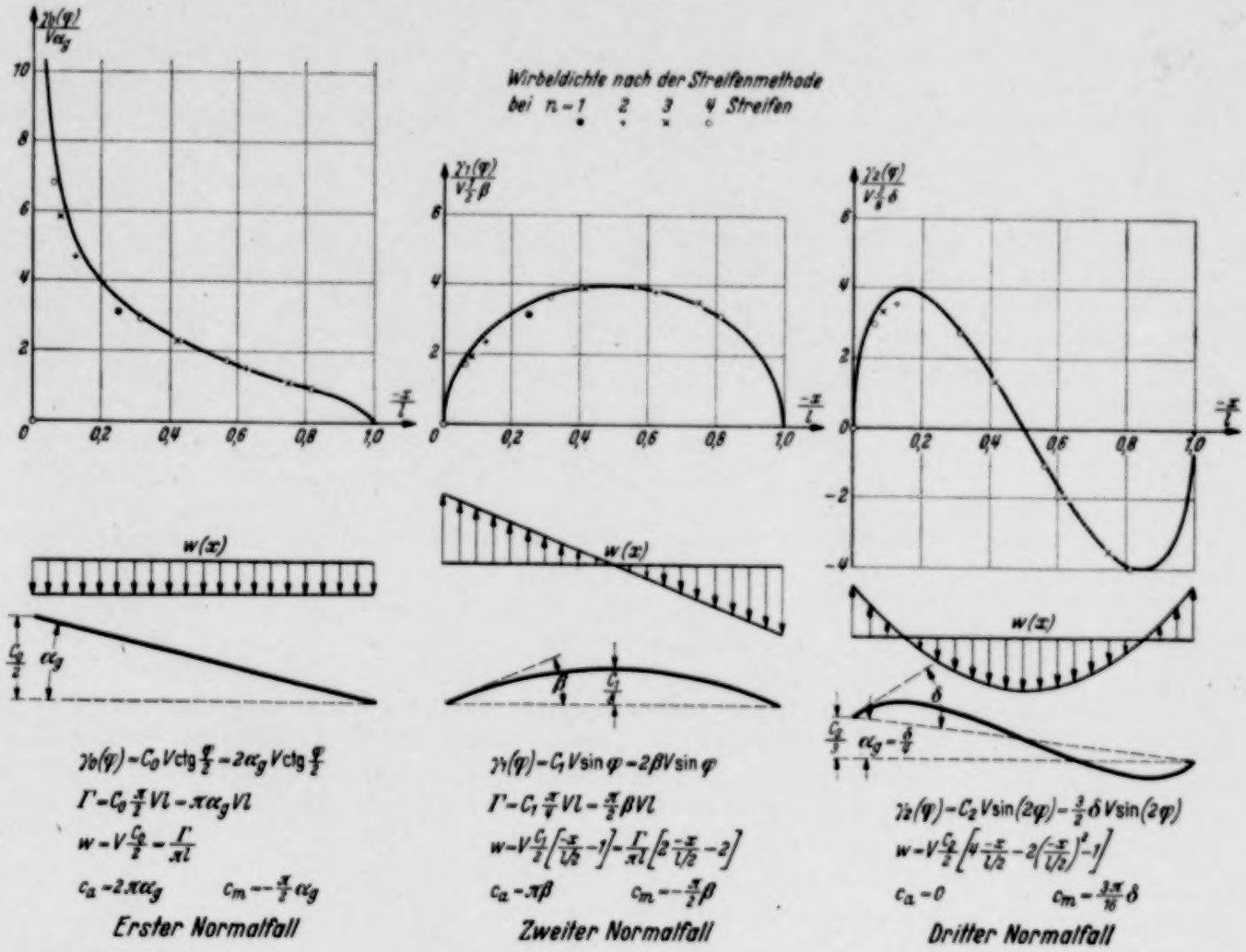

Abb. 1. Die *Birnbaum*schen Normalfälle.

ansetzt. Dabei bedeutet V die Anströmungsgeschwindigkeit und γ die Zirkulationsdichte. Mit dem Koordinatenursprung in der Flächenvorderkante ist der Winkel φ definiert durch

$$\cos\varphi = 1 + \frac{x}{l/2}$$

und läuft von $\varphi = 0$, $x = 0$ (Vorderkante) bis $\varphi = \pi$, $x = -l$ (Hinterkante) (positive x-Achse entgegen Strömungsrichtung). Der erste Term der Reihe (2, 1) stellt die Wirbelbelegung der ebenen Platte dar (Erste Normalverteilung), während die folgende Sinusreihe die Wirbelbelegung infolge beliebig gearteter Wölbung der Fläche wiedergibt. Durch Integration von (2, 1) lassen sich Auftrieb und Moment einer Wirbelbelegung angeben. Unter Verwendung der *Kutta-Joukowsky*schen Beziehung $A = \varrho V \Gamma$ für den Auftrieb pro Breiteneinheit, wobei die Gesamtzirkulation $\Gamma = \int_{x=-l}^{0} \gamma(x)\,dx$ ist, erhalten wir Auftriebs- und Momentenbeiwert[1] aus (2, 1) zu

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} V^2 . l} = \pi\left(C_0 + \frac{1}{2} C_1\right), \qquad c_m = \frac{M}{\frac{\varrho}{2} V^2 . l^2} = -\frac{\pi}{4}\left(C_0 + C_1 - \frac{1}{2} C_2\right). \tag{2,2}$$

[1] Moment bezogen auf Vorderkante.

Diese Ausdrücke enthalten nur die drei ersten Koeffizienten der Reihe (2, 1). Die übrigen Koeffizienten haben somit keinen Einfluß auf Auftrieb und Moment. Der induzierte Abwind einer Wirbelbelegung ergibt sich nach dem *Biot-Savart*schen Gesetz zu ($w>0$ Abwind)

$$w(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{x'=-l}^{0} \frac{\gamma(x')\,dx'}{x-x'}. \tag{2,3}$$

Die zugehörige Kontur $y(x)$ ist aus der Bedingung zu ermitteln, daß auf ihr die Normalkomponente der resultierenden Geschwindigkeit verschwindet, so daß der induzierte Abwind

$$w(x) = V\alpha(x) = V\frac{dy}{dx} \tag{2,4}$$

wird, wobei $\alpha(x)$ den Neigungswinkel der Kontur gegen die Grundgeschwindigkeit V darstellt. Die Gleichung der Kontur erhält man somit durch Integration von (2, 4). Die wichtigen Werte, die sich für die drei *Birnbaum*schen Normalverteilungen ergeben, sind in Abb. 1 zusammengestellt.

3. 3 *l*/4-Theorem und Streifenmethode. Die Übertragung der *Birnbaum*schen Theorie der tragenden Fläche auf den räumlichen Fall bringt vor allem erhebliche mathematische Schwierigkeiten mit sich. Es soll deshalb ein vereinfachtes Modell der tragenden Fläche abgeleitet werden. Wir betrachten hierzu den weitaus wichtigsten Fall der ebenen Platte und ersetzen die zugehörige Wirbelbelegung durch einen tragenden Einzelwirbel[1]. Dann können wir erstens aus der Bedingung gleicher Gesamtzirkulation die Zirkulation des Einzelwirbels angeben zu

$$\Gamma = \int_{x=-l}^{0} \gamma(x)\,dx = \pi\alpha_g V l$$

und zweitens aus der Bedingung gleichen Gesamtmomentes die Lage des Einzelwirbels ermitteln:

$$x_N = \frac{1}{\Gamma}\int_{x=-l}^{0} x\,\gamma(x)\,dx = -\frac{l}{4}.$$

Dies ist der vordere Neutralpunkt, für den das Moment unabhängig von der Gesamtzirkulation und im Falle der ebenen Platte gleich Null wird. Die Abwindbedingung (2, 4), die für die stetige Wirbelbelegung längs der ganzen Kontur erfüllt ist, kann nunmehr nur noch in einem Punkt der Kontur erfüllt werden, dem hinteren Neutralpunkt[2] x_A. Die Gleichsetzung des Abwindes

$$w(x_A) = \frac{\Gamma}{\pi l} = \frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{(-x_A)-\frac{l}{4}}$$

ergibt für diesen

$$x_A = -\frac{3}{4}l.$$

Wir haben damit gefunden: Wird für einen Einzelwirbel in $^1/_4$ der Flächentiefe die Abwindbedingung (2, 4) bei $^3/_4$ der Flächentiefe erfüllt, so liefert dieser Ersatzeinzelwirbel gleichen Gesamtauftrieb und gleiches Gesamtmoment wie die angestellte ebene Platte.

Die Bedeutung des $3l/4$-Punktes geht weiter, als es nach dem vorangehenden zunächst erscheint. Wenden wir das $3l/4$-Theorem auch auf den Fall des Kreisbogenprofiles an, so liefert die Abwindgleichung

$$w(x_A) = \frac{\Gamma}{\pi l} = V\frac{\beta}{2}$$

und somit

$$\Gamma = \frac{\pi}{2}\beta V l.$$

Dies stimmt ebenfalls mit dem exakten *Birnbaum*schen Ergebnis überein (vgl. Abb. 1). Wir können also ein Kreisbogenprofil durch eine ebene Platte mit gleicher Gesamtzirkulation ersetzen, welche im $3l/4$-Punkt das Kreisbogenprofil berührt, d. h. einen Anstellwinkel

[1] Die folgende Überlegung wurde, soweit aus der uns zugänglichen Literatur hervorgeht, erstmalig von *E. Pistolesi* angegeben.

[2] Nach *H. Multhopp* auch „Anstellpunkt".

$\alpha_g = \beta/2 = 2f/l$ besitzt. Damit ist der $3l/4$-Punkt des Kreisbogenprofiles dadurch ausgezeichnet, daß seine Tangentenrichtung mit der Nullauftriebsrichtung zusammenfällt. Das $3l/4$-Theorem erfaßt also im Sinne der Theorie der tragenden Linie neben der Steigung (ebene Platte) auch den Krümmungseinfluß der Stromlinien am Ort der Fläche.

Ferner läßt sich zur Theorie des hinteren Neutralpunktes noch zeigen, daß der Schwerpunkt der örtlichen Anstellwinkelempfindlichkeit längs Profiltiefe im $3l/4$-Punkt liegt. Betrachten wir nämlich eine längsangeströmte ebene Platte, die nur an der Stelle x über eine Strecke dx einen örtlichen Anstellwinkel α_g besitzt, so erhalten wir für den Auftrieb längs Tiefe, wenn x von Null bis l wandert,

$$\frac{dc_a}{dx} = 4\,\alpha_g \operatorname{ctg} \frac{\pi - \varphi}{2}.$$

Die Rechnung, die nach der *Glauert*schen Theorie des Klappenflügels leicht durchführbar ist, sei hier übergangen. Die erhaltene Auftriebsverteilung stellt die der ebenen Platte unter Vertauschung von Vorder- und Hinterkante dar und hat somit ihren Schwerpunkt bei $3l/4$.

Um nun auch zumindest näherungsweise Angaben über die Tiefenverteilung der Zirkulation mit Hilfe des $3l/4$-Theorem machen zu können, teilen wir die Tragfläche in eine Reihe hintereinander liegender Einzelflächen gleicher Tiefe auf (Flächenstreifen). Jeden Flächenstreifen ersetzen wir durch einen Einzelwirbel in $^1/_4$ der Streifentiefe. Die Zirkulation dieses Einzelwirbels ersetzt dann jeweils die Gesamtzirkulation des zugehörigen Flächenstreifens (Abb. 2). Im Grenzübergang zu unendlich vielen Streifen erhalten wir wieder die stetige Zirkulationsverteilung der Wirbelfläche. Zur Bestimmung der Streifenzirkulation erfüllen wir jeweils die Strömungsbedingung (2, 4) im $3l/4$-Punkt des Flächenstreifens, was gleichbedeutend ist mit der Mitte zwischen je zwei Wirbeln. Hierbei ist, wenn es sich um eine gewölbte Kontur handelt, der örtliche Anstellwinkel im $3l/4$-Punkt des Streifens für jeden einzelnen Streifen verschieden. Bei Aufteilung in n Streifen haben wir zur Ermittelung der n Teilzirkulationen Γ_ν der Flächenstreifen die Strömungsbedingungen in n Aufpunkten zu erfüllen, wobei ein lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen ist. Der Gesamtauftrieb ergibt sich nach der Streifenmethode aus der Summe der Teilzirkulationen zu
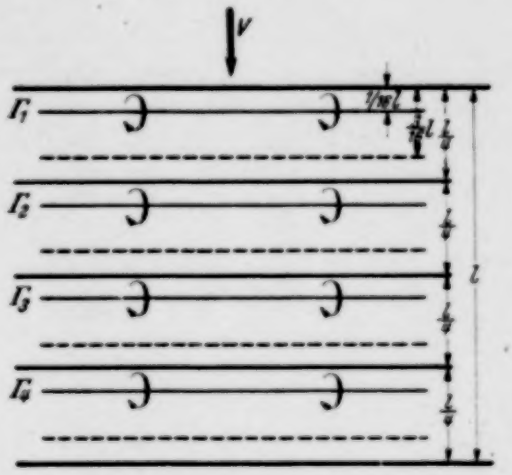
Abb. 2. Aufteilung der Tragfläche nach der Streifenmethode.

$$c_{a\,\mathrm{Str}} = \frac{2}{Vl}\,(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \cdots \Gamma_n). \tag{3, 1}$$

Für das Gesamtmoment um die Vorderkante erhalten wir bei Aufteilung in n Streifen

$$c_{m\,\mathrm{Str}} = \frac{-1}{2nVl}\left[\Gamma_1 + 5\Gamma_2 + 9\Gamma_3 + \cdots (4n-3)\,\Gamma_n\right]. \tag{3, 2}$$

Bezüglich der Tiefenverteilung der Zirkulation liefert die Streifenmethode die Wirbelstärke der n Einzelwirbel, die der Gesamtzirkulation der stetigen Wirbelbelegung in dem zugehörigen Streifenabschnitt entsprechen. Man kann somit eine mittlere Wirbeldichte für jeden Streifen annehmen von

$$\gamma_\nu = \frac{\Gamma_\nu}{l/n}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{3, 3}$$

Der Schwerpunkt dieser Wirbelbelegung soll ferner jeweils in $^1/_4$ der Streifentiefe liegen, so daß wir näherungsweise γ_ν als die Wirbeldichte im $l/4$-Punkt des ν-ten Flächenstreifens ansehen können.

4. Anwendung der Streifenmethode im ebenen Fall. Es soll nun zunächst gezeigt werden, inwieweit die Streifenmethode im ebenen Fall bei verschiedener Anzahl von Flächenstreifen mit den exakten Lösungen nach *Birnbaum* übereinstimmt. Dabei ist es zweckmäßig, zur Vereinfachung des Gleichungssystems eine dimensionslose Zirkulation zu bilden von der Form

$$G_\nu = \frac{1}{\lambda}\,\frac{\Gamma_\nu}{\pi V l}. \tag{4, 1}$$

Der Faktor λ ist hierbei eine dimensionslose Bestimmungsgröße der Profilkontur und wird zweckmäßig so gewählt, daß die dimensionslose Gesamtzirkulation G_{ges} im exakten Falle gleich eins wird. Für die ebene Platte müssen wir setzen

$$\lambda = \alpha_g .$$

Dann ist nämlich der Gesamtauftrieb nach (3, 1)

$$c_{a\,\mathrm{Str}} = 2\pi\alpha_g (G_1 + G_2 + \cdots G_n)$$

und damit das Verhältnis des Gesamtauftriebes nach der Streifenmethode zu demjenigen der exakten *Birnbaum*schen Lösung

$$\frac{c_{a\,\mathrm{Str}}}{c_{a\,\mathrm{ex}}} = (G_1 + G_2 + \cdots G_n). \tag{4,2}$$

Für das Gesamtmoment um die Vorderkante erhalten wir nach (3, 2)

$$c_{m\,\mathrm{Str}} = -\frac{\pi}{2}\alpha_g \frac{1}{n}\left[G_1 + 5G_2 + \cdots + (4n-3)G_n\right],$$

so daß hier für das Gesamtmoment wird

$$\frac{c_{m\,\mathrm{Str}}}{c_{m\,\mathrm{ex}}} = \frac{1}{n}\left[G_1 + 5G_2 + \cdots + (4n-3)G_n\right]. \tag{4,3}$$

Wir wollen nun die Gleichungssysteme für die ebene Platte bei Aufteilung in verschiedene Anzahl von Flächenstreifen aufschreiben. Hierbei stellt jede Gleichung die Strömungsbedingung (2, 4) im $3l/4$-Punkt des jeweiligen Streifens dar. Sie lauten für $n = 1$ bis 4:

$$\left.\begin{array}{lll}
n=1: & \text{Streifen 1:} & G_1 = 1 \\
n=2: & \text{Streifen 1:} & 2G_1 - 2G_2 = 1;\quad G_1 = \frac{3}{4} \\
 & \text{Streifen 2:} & \frac{2}{3}G_1 + 2G_2 = 1;\quad G_2 = \frac{1}{4} \\
n=3: & \text{Streifen 1:} & 3G_1 - 3G_2 - G_3 = 1;\quad G_1 = \frac{5}{8} \\
 & \text{Streifen 2:} & G_1 + 3G_2 - 3G_3 = 1;\quad G_2 = \frac{2}{8} \\
 & \text{Streifen 3:} & \frac{3}{5}G_1 + G_2 + 3G_3 = 1;\quad G_3 = \frac{1}{8} \\
n=4: & \text{Streifen 1:} & 4G_1 - 4G_2 - \frac{4}{3}G_3 - \frac{4}{5}G_4 = 1;\quad G_1 = \frac{35}{64} \\
 & \text{Streifen 2:} & \frac{4}{3}G_1 + 4G_2 - 4G_3 - \frac{4}{3}G_4 = 1;\quad G_2 = \frac{15}{64} \\
 & \text{Streifen 3:} & \frac{4}{5}G_1 + \frac{4}{3}G_2 + 4G_3 - 4G_4 = 1;\quad G_3 = \frac{9}{64} \\
 & \text{Streifen 4:} & \frac{4}{7}G_1 + \frac{4}{5}G_2 + \frac{4}{3}G_3 + 4G_4 = 1;\quad G_4 = \frac{5}{64}
\end{array}\right\} \tag{4,4}$$

Es ist also jeweils die Gesamtzirkulation nach der Streifenmethode

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_n = 1 \quad \text{für } n = 1,2,3,4. \tag{4,5}$$

Dies bedeutet nach (4, 2) exakte Übereinstimmung zwischen Streifenmethoden und Wirbelfläche bezüglich des Gesamtauftriebes. Außerdem erhalten wir, wie sich leicht bestätigen läßt, für alle vier Gleichungssysteme (4, 4)

$$G_1 + 5G_2 + \cdots + (4n-3)G_n = 1 \quad \text{für } n = 1,2,3,4. \tag{4,6}$$

Nach (4, 3) bedeutet dies exakte Übereinstimmung des Gesamtmomentes nach der Streifenmethode mit dem Ergebnis der Wirbelfläche.

Somit ist für Gesamtauftrieb und Gesamtmoment gezeigt, daß die Streifenmethode in Verbindung mit dem $3l/4$-Theorem für die ebene Platte die exakten Werte der Wirbelfläche liefert und zwar bei Aufteilung des Flügels bis zu vier Streifen. Es ist zu vermuten, daß diese Übereinstimmung für beliebige n größer als vier gilt, ein allgemein gültiger Beweis konnte jedoch nicht gefunden werden. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse der Streifenmethode mit den Lösungen der Wirbelfläche sowohl für Gesamtauftrieb und Moment als auch für die einzelnen Streifenzirkulationen ist in Zahlentafel 1 gegeben. Dabei sind die exakten Teilzirkulationen der einzelnen Streifen zu ermitteln aus $\Gamma_{\nu\,\mathrm{ex}} = \int \gamma(x)\,dx$ (Streifentiefe) und diese Werte noch in die dimensionslose Zirkulation G_ν (4, 1) umzurechnen.

Zahlentafel 1. *Vergleich der Ergebnisse der Birnbaumschen Theorie mit denen der Streifenmethode bei verschiedener Streifenzahl.*

Anzahl der Streifen n	Streifenzirkulation G_ν								Gesamt-Zirkulation		Gesamt-Moment
	1. Streifen		2. Streifen		3. Streifen		4. Streifen		$c_{a\,Str}/c_{a\,ex} = \frac{1}{\lambda}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma_\nu}{\pi V l}$		$\frac{c_{m\,Str}}{c_{m\,ex}}$
	$G_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\Gamma_1}{\pi V l}$		$G_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\Gamma_2}{\pi V l}$		$G_3 = \frac{1}{\lambda}\frac{\Gamma_3}{\pi V l}$		$G_4 = \frac{1}{\lambda}\frac{\Gamma_4}{\pi V l}$				
	Str	ex	Str	ex	Str	ex	Str	ex	Str	ex	
	Ebene Platte (erste Normalverteilung) $\lambda = \alpha_g$										
1	1	1	—	—	—	—	—	—	1	1	1
2	0,750	0,818	0,250	0,182	—	—	—	—	1	1	1
3	0,625	0,692	0,250	0,216	0,125	0,092	—	—	1	1	1
4	0,546	0,609	0,234	0,209	0,142	0,125	0,078	0,057	1	1	1
	Kreisbogen-Profil (zweite Normalverteilung) $\lambda = \beta/2$										
1	1	1	—	—	—	—	—	—	1	1	1/2
2	0,375	0,500	0,625	0,500	—	—	—	—	1	1	7/8
3	0,208	0,294	0,416	0,412	0,376	0,294	—	—	1	1	17/18
4	0,136	0,196	0,293	0,304	0,317	0,304	0,254	0,196	1	1	31/32
	S-Schlagprofil (dritte Normalverteilung) $\lambda = 3\delta/8$										
1	1	0	—	—	—	—	—	—	1	0	−1
2	0,562	0,424	−0,313	−0,424	—	—	—	—	1/4	0	1/2
3	0,347	0,370	0,139	0	−0,375	−0,370	—	—	1/9	0	7/9
4	0,239	0,276	0,220	0,148	−0,079	−0,148	−0,317	−0,276	1/16	0	7/8

In der gleichen Weise kann nun auch das Kreisbogen- und S-Schlagprofil (zweiter und dritter Normalfall) behandelt werden. Beim Kreisbogenprofil bilden wir eine dimensionslose Zirkulation nach (4, 1) mit $\lambda = \beta/2$ und beim S-Schlagprofil mit $\lambda = 3\delta/8$. Dann lauten nämlich die Abwindgleichungen in den so definierten dimensionslosen Zirkulationen G_ν ganz analog zu denen der ebenen Platte (4, 4), wie man sich leicht überzeugen kann. Lediglich das inhomogene Glied der rechten Seite ist jetzt nicht mehr eins wie bei der ebenen Platte, sondern nimmt den Wert $\alpha(x)/\lambda$ an, der im wesentlichen den örtlichen Anstellwinkel der Kontur im $3l/4$-Punkt des jeweiligen Streifens darstellt. Der Wert $\alpha(x)$ ist aus den Abwindgleichungen der *Birnbaum*schen Normalverteilungen sofort zu erhalten. In Zahlentafel 1 sind die Lösungen dieser beiden Fälle ebenfalls enthalten. Bemerkenswert ist vor allem, daß sich auch für das Kreisbogenprofil exakte Übereinstimmung des Gesamtauftriebes nach der Streifenmethode mit der *Birnbaum*schen Lösung bei Aufteilung in ein bis vier Streifen ergibt. Das Gesamtmoment liefert bei drei bis vier Streifen bereits genügende Annäherung an den exakten Wert, so daß eine Streifenzahl von 3 bis 4 als ausreichend betrachtet werden kann.

Wir sehen hieraus, daß die Streifenmethode in Verbindung mit dem $3l/4$-Theorem Gesamtauftrieb der ebenen Platte und des Kreisbogenprofiles sowie Gesamtmoment der ebenen Platte exakt liefert. Für das Gesamtmoment des Kreisbogenprofiles sowie des S-Schlagprofiles erhalten wir bereits bei einer Streifenzahl von 3 bis 4 recht gute Näherungswerte. Darüber hinaus nähern sich die Teilzirkulationen der einzelnen Streifen den exakten Lösungen für jede Kontur mit zunehmender Streifenzahl. Hierbei liegen die Teilzirkulationen der vorderen Wirbel durchweg unter den exakten Werten, die der hinteren darüber. Das gleiche geht aus Abb. 1 hervor, wo jeweils im $3l/4$-Punkt des Flächenstreifens die Größe der Wirbeldichte nach (3, 3) in die *Birnbaum*sche Wirbelbelegung eingetragen ist. Da für die *Birnbaum*sche Theorie das Überlagerungsprinzip gilt, darf geschlossen werden, daß auch die Streifenmethode für eine beliebige Kontur bei Aufteilung in wenige Streifen recht gute Näherungswerte liefert.

5. Die Übertragung auf das räumliche Problem. Für das räumliche Problem tritt nun eine weitere Abhängigkeit des Abwindes und damit auch der Zirkulation von der Breitenkoordinate y der Fläche hinzu, so daß die grundlegende Strömungsbedingung, die im ebenen Fall durch (2, 4) gegeben war, jetzt lautet

$$w(x,y) = V\alpha(x,y), \tag{5, 1}$$

was auf der ganzen Tragfläche zu erfüllen ist. Der Abwind setzt sich dabei infolge des hinter der Fläche abgehenden freien Wirbelbandes aus zwei Anteilen zusammen, dem gebundenen und dem freien Anteil:

$$w = w_g + w_f.$$

Diese Anteile lassen sich nach dem *Biot-Savart*schen Gesetz angeben. Wir berechnen sie für einen geraden tragenden Wirbelfaden, der in der y-Achse liegt (Abb. 3). Seine Zirkulation an der Stelle y' sei $\Gamma(y')$, dann hat der abgebende Wirbelfaden die Stärke $(d\Gamma/dy')$. Der Abwind in einem Punkte (x, y) der Flächenebene beträgt, wie aus Abb. 3 abgelesen werden kann,

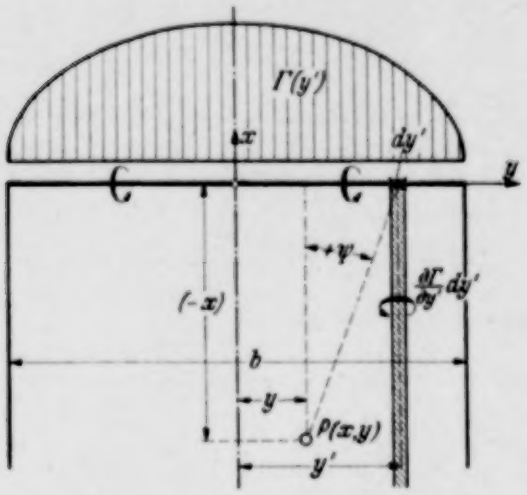

Abb. 3. Zur Aufstellung der Abwindformeln.

$$w_g(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{y'=-b/2}^{+b/2} \Gamma(y') \frac{\cos\psi}{x^2+(y-y')^2}\, dy', \qquad (5,2a)$$

$$w_f(x,y) = \frac{1}{4\pi} \int_{y'=-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{(1+\cos\psi)}{(y-y')}\, dy' \qquad (5,2b)$$

$$\text{mit} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y'-y}{(-x)}.$$

Wenden wir jetzt auf unsere Tragfläche die Streifenmethode an, wobei wir uns wegen der Gradlinigkeit der gebundenen Wirbelfäden auf den rechteckigen Grundriß beschränken müssen, so summieren sich die Abwindanteile der einzelnen Streifenwirbel. Legen wir die y-Achse in die Flächenvorderkante, so haben die Lagekoordinaten der Streifenwirbel $\Gamma^{(\nu)}$, die jeweils in $^1/_4$ der Streifentiefe liegen, die Werte

$$(-x_\nu) = \frac{4\nu-3}{4n} l \qquad (\nu = 1,2,3,\ldots n).$$

Dann ergibt sich aus der Strömungsbedingung (3, 1) die fundamentale Gleichung des Problems

$$\alpha(x,y) = \frac{1}{4\pi V} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\int_{y'=-b/2}^{+b/2} \Gamma^{(\nu)}(y) \frac{\cos\psi\, dy'}{(x-x_\nu)^2+(y-y')^2} + \int_{y'=-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma^{(\nu)}}{dy'} \frac{(1+\cos\psi)}{y-y'}\, dy' \right] \qquad (5,3)$$

$$\text{mit} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y'-y}{x_\nu - x} \qquad (\nu = 1,2,3,\ldots n)$$

mit den gesuchten Funktionen $\Gamma^{(1)}(y); \Gamma^{(2)}(y); \Gamma^{(3)}(y); \ldots . \Gamma^{(n)}(y)$. Diese Integrodifferentialgleichung ist zu erfüllen auf den Linien $x =$ konst zwischen $-b/2 < y < +b/2$, welche die $3l/4$-Linien der einzelnen Flächenstreifen darstellen, also für

$$(-x) = \frac{4\nu-1}{4n} l \qquad (\nu = 1,2,3,\ldots n).$$

Gleichung (5, 3) kann für $n = 1$ (Traglinientheorie) und verschwindende Tiefe $l \ll b$ in die *Prandtl*sche Integrodifferentialgleichung überführt werden. Hierzu müssen wir noch das vom gebundenen Wirbel herrührende Integral durch partielle Integration etwas umformen. Wie in Abschnitt 8 noch kurz gezeigt wird, erhält man

$$w_g = -\frac{1}{4\pi(-x)} \int_{y'=-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \sin\psi\, dy'.$$

Für unseren Grenzübergang $l/b \longrightarrow 0$ und $n = 1$ haben wir zu setzen

$$(x)-(-x_1) = l/2; \qquad \psi = \pi/2 \text{ für } y' > y \quad \text{und} \quad \psi = -\pi/2 \text{ für } y' < y.$$

Dann läßt sich das erste Integral ohne weiteres auswerten, und wir erhalten die bekannte *Prandtl*sche Gleichung

$$\alpha(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi V l(y)} + \frac{1}{4\pi V} \int_{y'=-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'}. \qquad (5,4)$$

Der erste Term dieser Gleichung stellt bekanntlich den effektiven Anstellwinkel α_e dar, das ist im Sinne des $3l/4$-Theorems der Abwind des gebundenen Wirbels auf der $3l/4$-Linie der Tragfläche bei unendlich langer tragender Linie (ebener Fall). Der zweite Term stellt den Abwind des freien Wirbelbandes auf der $l/4$-Linie, also am Ort der tragenden Linie selbst dar. Die beiden Terme enthalten gegenüber dem $3l/4$-Theorem Abweichungen im entgegengesetzten Sinne, so daß sie sich teilweise kompensieren. Hierauf dürften die auch bei kleinen Seitenverhältnissen noch recht guten Ergebnisse der Traglinientheorie zurückzuführen sein.

Um eine Lösung der Gleichung (5, 3) zu finden, vereinfachen wir das Problem jetzt noch dadurch, daß wir diese nicht in allen Punkten der $3l/4$-Linien $x=$konst längs Spannweite erfüllen sondern nur in einzelnen Punkten. Dann läßt sich nämlich die Integralgleichung (5, 3) zerlegen in ein lineares Gleichungssystem von endlich vielen Gleichungen. Für die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ erhalten wir damit Näherungen, die noch einer genaueren Betrachtung unterzogen werden sollen.

Wir setzen hierzu die Zirkulationsverteilungen der einzelnen Streifen als die folgenden trigonometrischen Reihen an:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{(1)}(y) &= V b \alpha_g (a_1 \sin\vartheta + a_3 \sin 3\vartheta + a_5 \sin 5\vartheta + \cdots), \\ \Gamma^{(2)}(y) &= V b \alpha_g (b_1 \sin\vartheta + b_3 \sin 3\vartheta + b_5 \sin 5\vartheta + \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5,5}$$

Dabei bedeutet α_g den geometrischen Anstellwinkel an irgendeiner fest gewählten Stelle der Fläche, auf den alle Neigungswinkel der Fläche bezogen werden.

Die Winkelkoordinate ϑ definieren wir in bekannter Weise durch

$$\cos\vartheta = \frac{y}{b/2},$$

so daß in den Grenzen von $+b/2$ bis $-b/2$ der Winkel ϑ von 0 bis π variiert. Da die Funktion $\Gamma(y)$ symmetrisch zur Flächenmittellinie ist, scheiden die geraden Glieder von vornherein aus. Für den Abwind eines Punktes der Flächenebene machen wir dann entsprechend (5, 5) den Ansatz

$$\frac{w}{V} = \varepsilon = \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)} + \cdots + \varepsilon^{(n)} \tag{5,6a}$$

oder

$$\varepsilon = \alpha_g \left[(a_1 \varepsilon_1^{(1)} + a_3 \varepsilon_3^{(1)} + a_5 \varepsilon_5^{(1)} + \cdots) + (b_1 \varepsilon_1^{(2)} + b_3 \varepsilon_3^{(2)} + b_5 \varepsilon_3^{(2)} + \cdots) + \cdots \right], \tag{5,6b}$$

wobei die $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \varepsilon_5^{(1)} \ldots$ als noch zu berechnende Abwindfunktionen aufzufassen sind, die sowohl von der Breitenkoordinate y als auch von dem relativen Abstand zwischen Wirbel und Aufpunkt $(x-x_F)$ abhängen. Zur Ermittlung der Koeffizienten $a_1, a_3, a_5, \ldots b_1, b_3, b_5, \ldots$ usw. steht uns die Strömungsbedingung (5, 1) in der Form

$$\varepsilon(x,y) = \alpha(x,y) \tag{5,7}$$

zur Verfügung. Wir können diese also bei n Streifenwirbeln und m Koeffizienten der Reihen (5, 5) in $n \cdot m$ Punkten der Tragfläche erfüllen, woraus sich ein Gleichungssystem von $n \cdot m$ Gleichungen ergibt. Aus Symmetriegründen können wir diese Aufpunkte nur auf einer Hälfte der Fläche wählen und nehmen hierbei äquidistante Abstände des Winkels ϑ. Unser zu lösendes Gleichungssystem nimmt dann die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 \varepsilon_{1p}^{(1)} + a_3 \varepsilon_{3p}^{(1)} + a_5 \varepsilon_{3p}^{(1)} + \cdots \\ &b_1 \varepsilon_{1p}^{(2)} + b_3 \varepsilon_{3p}^{(2)} + b_5 \varepsilon_{5p}^{(2)} + \cdots \\ &c_1 \varepsilon_{1p}^{(3)} + c_3 \varepsilon_{3p}^{(3)} + c_5 \varepsilon_{5p}^{(3)} + \cdots = \frac{\alpha_p}{\alpha_g} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(p = 1, 2, 3, \ldots n \cdot m; \\ &\text{Zeiger der Aufpunkte}). \end{aligned} \tag{5,8}$$

Das Koeffizientenschema der linken Seite dieses Gleichungssystems ist nur abhängig vom Seitenverhältnis bzw. der Flächenform, nicht dagegen von der örtlichen Anstellwinkelverteilung (Verwindung und Wölbung). Diese wird nur durch die inhomogenen Glieder α_p/α_g bestimmt. Als Lösung des Gleichungssystems erhalten wir die $n \cdot m$ Koeffizienten der Gleichungen (5, 5), die uns die Zirkulationsverteilungen der einzelnen Streifenwirbel längs Spannweite liefern. Die Auftriebs- und Momentenbeiwerte der Fläche schreiben sich mit diesen Lösungen, wie folgt [vgl. im ebenen Fall Gleichung (3, 1) und (3, 2)]:

$$\left.\begin{aligned} c_{a\,\text{örtl}} = 2\frac{b}{l} \big[&(a_1 + b_1 + c_1 + \cdots) \sin\vartheta + (a_3 + b_3 + c_3 + \cdots) \sin 3\vartheta + \\ &+ (a_5 + b_5 + c_5 + \cdots) \sin 5\vartheta + \cdots \big] \alpha_g, \end{aligned}\right\} \tag{5,9}$$

$$c_{a\,\text{ges}} = \frac{\pi}{l} \frac{b}{l} (a_1 + b_1 + c_1 + \cdots) \alpha_g, \tag{5,10}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{m\,\text{örtl}} = -\frac{1}{2n} \frac{b}{l} \big[&(a_1 + 5b_1 + 9c_1 + \cdots) \sin\vartheta + (a_3 + 5b_3 + 9c_3 + \cdots) \sin 3\vartheta + \\ &+ (a_5 + 5b_5 + 9c_5) \sin 5\vartheta + \cdots \big] \alpha_g, \end{aligned}\right\} \tag{5,11}$$

$$c_{m\,\text{ges}} = -\frac{\pi}{8n} \frac{b}{l} (a_1 + 5b_1 + 9c_1 + \cdots) \alpha_g. \tag{5,12}$$

Hierzu ist bemerkenswert, daß zu den Gesamtwerten von Auftrieb und Moment nur die ersten Koeffizienten der Reihen (5,5) a_1, b_1, c_1,... Beiträge liefern. Diese ersten Glieder stellen die elliptische Verteilung dar.

6. Die Grenzfälle der Zirkulationsverteilung längs Spannweite. Wir haben die Zirkulationsverteilung längs Spannweite als eine unendliche trigonometrische Reihe (5, 5) angesetzt, deren Gliederzahl aber zunächst noch offen gelassen wurde. Wieviele Glieder der Reihe (5, 5) notwendig sind, um bei erträglichem Rechenaufwand eine ausreichende Genauigkeit zu erzielen, soll am Grenzübergang zum ebenen Fall nachgeprüft werden. Hierfür lassen wir $l \longrightarrow 0$ gehen, so daß $b/l \longrightarrow \infty$ geht. In diesem Falle liefert nur der gebundene Wirbel einen Anteil zum Abwind. Dieser beträgt auf der $3l/4$-Linie mit dem Abstand $l/2$ vom gebundenen Wirbel nach dem *Biot-Savart*schen Gesetz

$$\varepsilon_g(y) = \frac{\Gamma(y)}{2\pi V \frac{l}{2}} = \frac{\Gamma(y)}{\pi l V}.$$

Da $l \longrightarrow 0$ geht, multiplizieren wir mit l/b und erhalten mit $\Gamma(y)$ nach (5,5):

$$\varepsilon \frac{l}{b} = \frac{\Gamma}{\pi b V} = \frac{\alpha_g}{\pi}(a_1 \sin\vartheta + a_3 \sin 3\vartheta + a_5 \sin 5\vartheta + \cdots).$$

Bedenken wir, daß unser Ansatz für den Abwind nach (5,6b) lautete $\varepsilon = \alpha_g(a_1\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_3 + a_5\varepsilon_5 + \cdots)$, so folgt sofort aus einem Vergleich

$$\pi \frac{l}{b}\varepsilon_1 = \sin\vartheta\,; \qquad \pi \frac{l}{b}\varepsilon_3 = \sin 3\vartheta\,; \qquad \pi \frac{l}{b}\varepsilon_5 = \sin 5\vartheta\,; \ldots . \tag{6,1}$$

Es ist nun das Gleichungssystem (5, 7) zu lösen für den Fall der ebenen Platte ohne Verwindung, also mit $\alpha_g \equiv \alpha_p$. Damit ist zunächst das inhomogene Glied für alle Gleichungen gleich eins. Ferner können wir uns wegen $l/b \longrightarrow 0$ auf einen tragenden Wirbel beschränken. Erweitern wir die linken Seiten der Gleichungen (5, 7) noch mit dem Faktor $\pi l/b$ und führen ein

$$a_\mu^* = \frac{a_\mu}{\pi l/b} \qquad (\mu = 1, 3, 5, \ldots), \tag{6,2}$$

wobei a_μ^* für $l/b \longrightarrow 0$ endlich bleibt, so erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} a_1^*\left(\pi \frac{l}{b}\varepsilon_{1p}\right) + a_3^*\left(\pi \frac{l}{b}\varepsilon_{3p}\right) + a_5^*\left(\pi \frac{l}{b}\varepsilon_{5p}\right) + \cdots = 1 \\ (p = 1, 2, 3, \ldots m, \text{ Zeiger der Aufpunkte})\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,3}$$

Die Klammerausdrücke haben wir bereits in (6, 1) ermittelt. Die Aufpunkte wählen wir auf der $3l/4$-Linie in äquidistanten Abständen des Winkels ϑ zwischen $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = 0$. Dann lauten die Gleichungssysteme für verschiedene Gliederzahl m:

$$m=1: \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}: \qquad a_1^* = 1, \quad a_1^* = 1,$$

$$m=2: \begin{cases} \vartheta = \frac{\pi}{2}: & a_1^* - a_3^* = 1, & a_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \vartheta = \frac{\pi}{4}: & \frac{1}{\sqrt{2}}a_1^* + \frac{1}{\sqrt{2}}a_3^* = 1, & a_3^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

$$m=3: \begin{cases} \vartheta = \frac{\pi}{2}: & a_1^* - a_3^* + a_5^* = 1, & a_1^* = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \vartheta = \frac{\pi}{3}: & \frac{\sqrt{3}}{2}a_1^* + 0\cdot a_3^* - \frac{\sqrt{3}}{2}a_5^* = 1, & a_3^* = \frac{1}{3}, \\ \vartheta = \frac{\pi}{6}: & \frac{1}{2}a_1^* + a_3^* + \frac{1}{2}a_5^* = 1, & a_5^* = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Für den Auftriebsanstieg der Tragfläche erhalten wir nun, indem wir (5, 9) mit $\pi l/b$ erweitern,

$$\frac{dc_a}{d\alpha_g} = \frac{\pi^2}{2}\frac{a_1}{\pi\frac{l}{b}} = \frac{\pi^2}{2}a_1^*$$

und damit für das Verhältnis des Auftriebsanstieges der Näherungslösung zu dem exakten Wert 2π im ebenen Fall

$$\frac{1}{2\pi}\frac{dc_a}{d\alpha_{g\infty}} = \frac{\pi}{4}a_1^*\,.$$

Dies ergibt die folgenden Zahlenwerte:

m	1	2	3
$\frac{1}{2\pi}\frac{dc_a}{d\alpha_{g\infty}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
	0,786	0,945	0,978

Bei drei Sinusgliedern beträgt danach der Fehler noch 2%, was als ausreichend angesehen werden kann. Das Ergebnis bei $m=1$ erhält *K. Wieghardt* im Grenzübergang zum ebenen Fall, da er sich auf das erste Glied, die elliptische Verteilung, beschränkte. Die Zirkulationsverteilung längs Spannweite schreibt sich nun mit $\Gamma_\infty = Vl\pi\alpha_{g\infty}$ in den Koeffizienten a_μ^*

$$\frac{\Gamma(y)}{\Gamma_\infty} = a_1^* \sin\vartheta + a_3^* \sin 3\vartheta + a_5^* \sin 5\vartheta + \cdots .$$

Sie ist in Abb. 3 für $m=1, 2, 3$ über der Spannweite aufgetragen. Für $m=3$ ist die Annäherung an die konstante Auftriebsverteilung des ebenen Falles bereits recht gut. Dabei möge bedacht werden, daß hier der ungünstigste Fall vorliegt, ein Rechteck durch eine endliche Sinusreihe anzunähern. Bei den Flächen von endlichem Seitenverhältnis kommt jedoch die Auftriebsverteilung der elliptischen näher, und man kann deshalb erwarten, daß in solchen Fällen die Annäherung durch die dreigliedrige *Fourier*-Reihe wesentlich besser ist als nach Abb. 4.

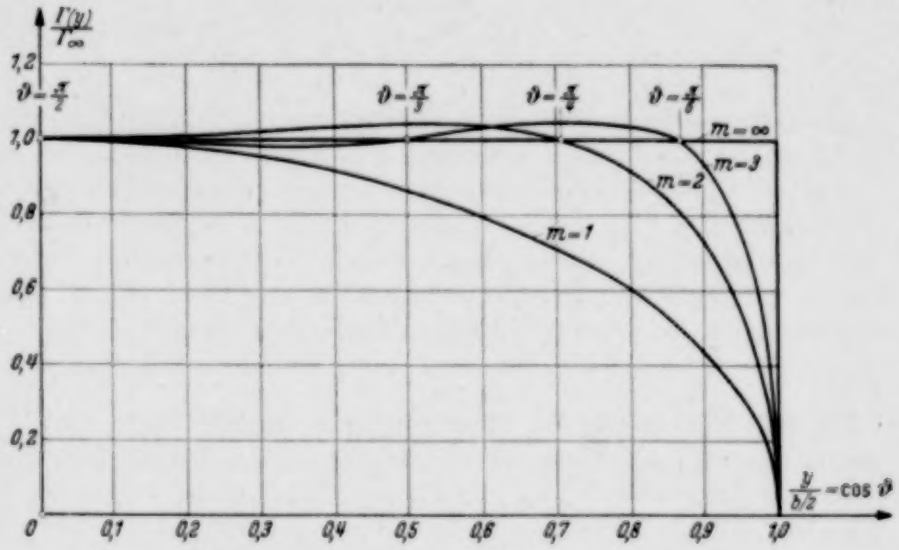

Abb. 4. Annäherung des ebenen Falles durch m Glieder einer Sinusreihe für die Zirkulationsverteilung längs Spannweite.

Betrachten wir nun noch den Grenzfall eines sehr kleinen Seitenverhältnisses $b \longrightarrow 0$, so rückt die $3l/4$-Linie sehr weit hinter den tragenden Wirbel, so daß nur die freien Wirbel Beiträge zum Abwind liefern. Für den Fall der unverwundenen Tragfläche muß der Abwind auf der $3l/4$-Linie konstant, das heißt unabhängig von y sein. Für $x \longrightarrow -\infty$ besitzt nur die elliptische Zirkulationsverteilung einen konstanten Abwind, nämlich

$$x \longrightarrow -\infty: \quad \varepsilon_{ell} = 2\frac{c_a}{\pi\Lambda}.$$

Die unverwundene Tragfläche sehr kleinen Seitenverhältnisses besitzt also unabhängig von der Flächenumrißform eine elliptische Auftriebsverteilung. Aus $\varepsilon_{ell} = \alpha_g$ erhält man den Auftriebsanstieg

$$\Lambda \longrightarrow 0: \quad \frac{dc_a}{d\alpha_g} = \frac{\pi}{2}\Lambda.$$

Er ist gerade halb so groß wie der der Traglinientheorie bei $\Lambda \longrightarrow 0$. *

7. Die Zirkulationsverteilung längs Flächentiefe. Aus der Streifenmethode erhalten wir eine Zirkulationsverteilung längs Tiefe nur insofern, als wir die Gesamtzirkulation der einzelnen Flächenstreifen kennen. Am ebenen Fall wurde bereits gezeigt, daß drei bis vier Streifen eine ausreichende Annäherung an die exakten Werte der Wirbelfläche bringen. Wir wollen jedoch aus den Ergebnissen der Streifenmethode noch eine stetige Zirkulationsverteilung über die Tiefe errechnen, um somit die Druckverteilung über der gesamten Tragfläche angeben zu können. Hierzu setzen wir für die Verteilung längs Tiefe die vom ebenen Fall her bekannte *Glauert*sche Reihe an, in deren freie Koeffizienten wir jetzt die Änderung der Zirkulationsverteilung längs Spann-

* Für die Traglinientheorie ist $dc_a/d\alpha_g = 2\pi\Lambda/(2+\Lambda)$.

weite legen. Wir erhalten also eine flächenhaft über den Flächengrundriß verteilte Zirkulation in der Form

$$\left.\begin{aligned}\gamma(x,y) = V\alpha_g\big[&(k_{01}\sin\vartheta + k_{03}\sin 3\vartheta + k_{05}\sin 5\vartheta + \cdots)\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} + \\ &+ (k_{11}\sin\vartheta + k_{13}\sin 3\vartheta + k_{15}\sin 5\vartheta + \cdots)\sin\varphi + \\ &+ (k_{21}\sin\vartheta + k_{23}\sin 5\vartheta + k_{25}\sin 5\vartheta + \cdots)\sin 2\varphi + \cdots\big],\end{aligned}\right\} \qquad (7,1)$$

wobei die Winkelkoordinate φ die Änderung längs Tiefe und die Winkelkoordinate ϑ die Änderung längs Spannweite liefert.

Zur Bestimmung der Koeffizienten in (7, 1) benutzen wir die Bedingungen gleichen Auftriebes und gleichen Momentes wie bei der Streifenmethode für jeden Flächenschnitt $l\,dy$, also

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{\text{stet}} = \varrho V \int_{x=-l}^{0} \gamma(x,y)\,dx = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{\text{Str}}. \qquad (7,2a)$$

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial y}\right)_{\text{stet}} = \varrho V \int_{x=-l}^{0} x\,\gamma(x,y)\,dx = \left(\frac{\partial M_1}{\partial y}\right)_{\text{Str}}. \qquad (7,2b)$$

$$\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)_{\text{stet}} = \varrho V \int_{x=-l}^{0} x^2\gamma(x,y)\,dx = \left(\frac{\partial M_2}{\partial y}\right)_{\text{Str}}. \qquad (7,2c)$$

Dabei entnehmen wir die Werte der rechten Seiten aus den Lösungen der Streifenmethode, wobei je nach der Streifenzahl n dieser Gleichungen (7, 2) benötigt werden.

Das Verfahren liefert im Grenzübergang zum ebenen Fall dann die exakt richtige Zirkulationsverteilung über die Tiefe, wenn auch die Streifenmethode die richtigen Werte für Gesamtauftrieb und Gesamtmoment im ebenen Fall liefert (vgl. Zahlentafel 1). In den Fällen, in denen die Streifenmethode von der exakten Lösung abweicht, muß das Ergebnis der Streifenmethode mit einem Korrekturfaktor $(M_{\text{ex}}/M_{\text{Str}})_{A\to\infty}$ versehen werden, um nach (7, 1) einen Übergang in die exakte Tiefenverteilung des ebenen Falles zu erhalten.

8. Die Berechnung der Abwindfunktionen. Wir haben bisher noch die Berechnung der Abwindfunktionen $\varepsilon(x,y)$ offengelassen, die wir als Koeffizienten des Gleichungssystems (5, 7) benötigen. Diese sind universell, und ihre Berechnung nimmt damit den Hauptteil der für einen speziellen Fall notwendigen Rechenarbeiten vorweg. Wir führen sie durch für den Fall eines geraden tragenden Wirbels, dessen Zirkulation $\Gamma(y)$ nach den ersten drei Gliedern der Sinusreihe (5, 5) verteilt ist, also für $\mu = 1, 3, 5$ (vgl. Abb. 3),

Den Abwind in einem Punkte (x, y) der Tragfläche hatten wir bereits in (5, 2) aufgestellt. Der Abwind der freien Wirbel enthält für Punkte hinter der Tragfläche (x—0) eine Singularität bei $y = y'$. Um w_f bequemer berechnen zu können, spalten wir daher für $x<0$ das Integral (5, 2b) auf in

$$w_f = \frac{1}{1\pi}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{d\Gamma}{dy'}\,\frac{dy'}{y-y'} - \frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{+b/2}\frac{d\Gamma}{dy'}\,\frac{1-\cos\psi}{y-y'}\,dy'. \qquad (8,1)$$

Jetzt liegt die Singularität nur noch im ersten Integral, das sich nach *H. Glauert* analytisch auswerten läßt. Das Abwindintegral der gebundenen Wirbel läßt sich als eine Integration über ψ schreiben. Nach Erweiterung mit $-x$ wird mit $dy' = -x\,d\psi/\cos^2\psi$ nach (5, 3c)

$$w_g = \frac{1}{4\pi(-x)}\int_{-b/2}^{+b/2}\Gamma(y')\cos\psi\,d\psi.$$

Durch partielle Integration spalten wir dieses auf in

$$w_g = \frac{1}{4\pi(-x)}\left\{\Big[\Gamma(y')\sin\psi\Big]_{-b/2}^{+b/2} - \int_{-b/2}^{+b/2}\frac{d\Gamma}{dy'}\sin\psi\,dy'\right\}.$$

Der erste Term wird Null, da $\Gamma(y')$ an den Grenzen verschwindet, so daß wir endgültig für den Abwind der gebundenen Wirbel erhalten

$$w_g = -\frac{1}{4\pi(-x)}\int_{y'=-b/2}^{+b/2}\frac{d\Gamma}{dy'}\sin\psi\,dy'. \qquad (8,2)$$

Wir führen nun neben den dimensionslosen Koordinaten $\eta = \frac{y}{b/2}$ und $\xi = \frac{x}{b/2}$ für die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ den Reihenansatz (5, 5) ein

$$\Gamma(y') = Vb\alpha_g(a_1 \sin\vartheta' + a_3 \sin 3\vartheta' + a_5 \sin 3\vartheta')$$

und ebenso für den Abwind eines Punktes der Tragfläche nach (5, 6 b)

$$\varepsilon = (a_1\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_3 + a_5\varepsilon_5)\,\alpha_g$$

und bei Aufteilung in den Beitrag des freien und des gebundenen Wirbels

$$\varepsilon = \left[a_1(\varepsilon_{f1} + \varepsilon_{g1}) + a_3(\varepsilon_{f3} + \varepsilon_{g3}) + a_5(\varepsilon_{f5} + \varepsilon_{g5})\right]\alpha_g.$$

Damit erhalten wir folgende Formeln für die Abwindfunktionen

a) Freier Wirbel:

$$\varepsilon_{f\mu} = \mu\left[\frac{\sin(\mu\vartheta)}{\sin\vartheta} - \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta'=0}^{\pi}\cos(\mu\vartheta')\,\frac{(1-\cos\psi)\,d\vartheta'}{\cos\vartheta'-\cos\vartheta}\right] \quad (\mu = 1, 3, 5), \tag{8,3}$$

b) Gebundener Wirbel:

$$\varepsilon_{g\mu} = \frac{\mu}{2\pi(-\xi)}\int_{\vartheta'=0}^{\pi}\cos(\mu\vartheta')\sin\psi\,d\vartheta' \quad (\mu = 1, 3, 5), \tag{8,4}$$

c) Gesamtabwind:

$$\varepsilon_\mu = \mu\left[\frac{\sin(\mu\vartheta)}{\sin\vartheta} + \frac{1}{2\pi(-\xi)}\int_{\vartheta'=0}^{\pi}\cos(\mu\vartheta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}\,d\vartheta'\right] \tag{8,5}$$

$$\text{mit} \quad \mathrm{tg}\,\psi = \frac{\cos\vartheta' - \cos\vartheta}{-\xi}.$$

Für die Grenzwerte bei $\xi \longrightarrow 0$ (am Ort des Wirbels) erhält man

$$\varepsilon_{f\mu} = \frac{\mu}{2}\,\frac{\sin(\mu\vartheta)}{\sin\vartheta}; \tag{8,6a}$$

$$(-\xi)\,\varepsilon_{g\mu} = \frac{\sin(\mu\vartheta)}{\pi} \tag{8,6b}$$

und bei $\xi \longrightarrow -\infty$ (sehr weit hinter dem Wirbel)

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{f\mu}(-\infty) &= \mu\,\frac{\sin(\mu\vartheta)}{\sin\vartheta}\\ \varepsilon_{g\mu} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8,6c}$$

Ferner findet man folgende Symmetriebeziehungen:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{f\mu}(-\xi)\\ &= \varepsilon_{f\mu}(-\infty) - \varepsilon_{f\mu}(+\xi),\end{aligned}\right\} \tag{8,7a}$$

$$\varepsilon_{g\mu}(-\xi) = -\varepsilon_{g\mu}(+\xi). \tag{8,7b}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{\mu}(-\xi)\\ &= \varepsilon_{f\mu}(-\infty) - \varepsilon_{\mu}(+\xi).\end{aligned}\right\} \tag{8,7c}$$

Damit beschränkt sich die Berechnung der Abwindfunktionen auf positive Werte von ξ und wegen der Symmetrie zur Flächenmittelebene auch auf positive Werte von η.

Die in den Formeln (8, 3), (8, 4) und (8, 5) auftretenden Integrale sind von elliptischem Typus, lassen sich aber im allgemeinen nicht auf elliptische Integrale erster und zweiter Gattung zurückführen. Von den

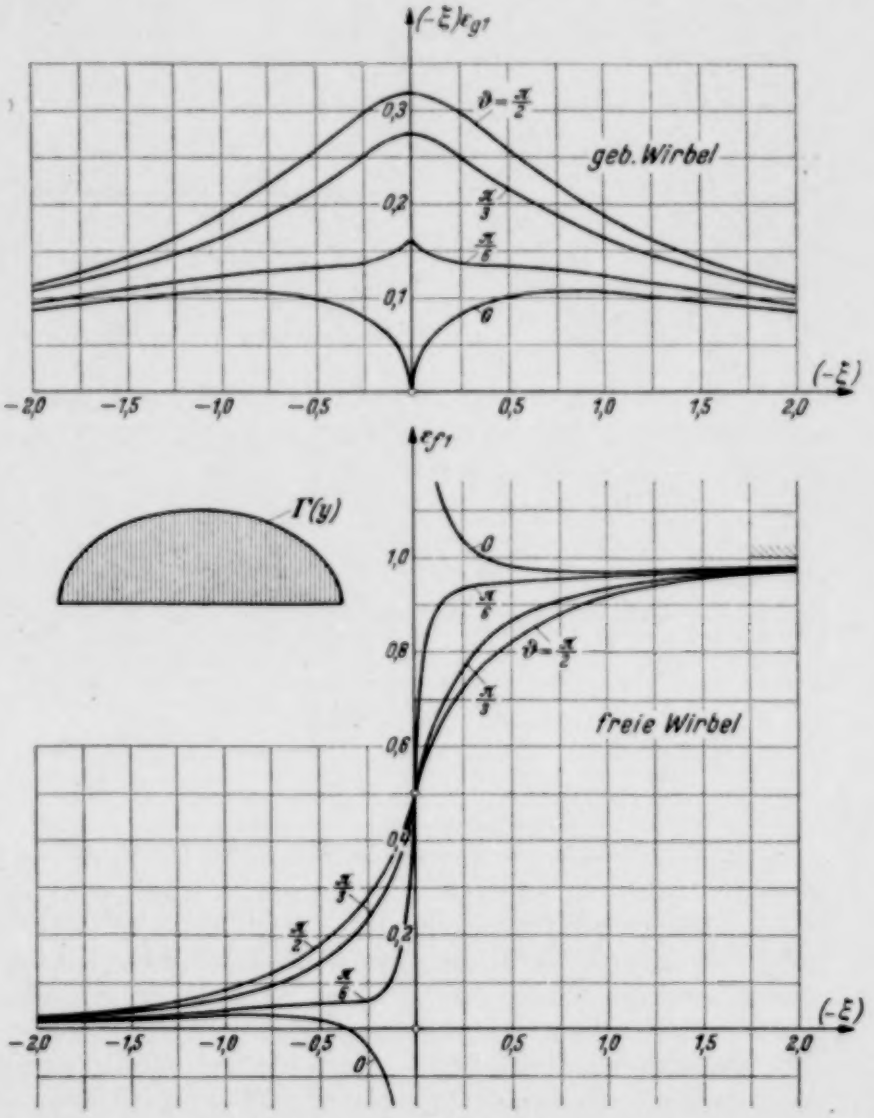

Abb. 5. Abwindfunktionen des ersten *Fourier*gliedes der Zirkulationsverteilung.

$\mu+1$ Nullstellen der Integranden werden μ Nullstellen durch das Glied $\cos\mu\vartheta$ verursacht, und eine Nullstelle durch den Winkel ψ, der bei $\vartheta'=\vartheta$ zu Null wird. Diese Nullstelle verdient besondere Beachtung, da im Falle $\xi\longrightarrow 0$ an dieser Stelle eine Unstetigkeit mit Vorzeichenwechsel auftritt. Für kleine ξ und bei $\mu=1$ wurde zur numerischen Integration das Integrationsintervall in drei Bereiche aufgeteilt, nämlich in

$$0\leqq\vartheta'\leqq\vartheta, \qquad \vartheta\leqq\vartheta'\leqq\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{2}\leqq\vartheta'\leqq\pi.$$

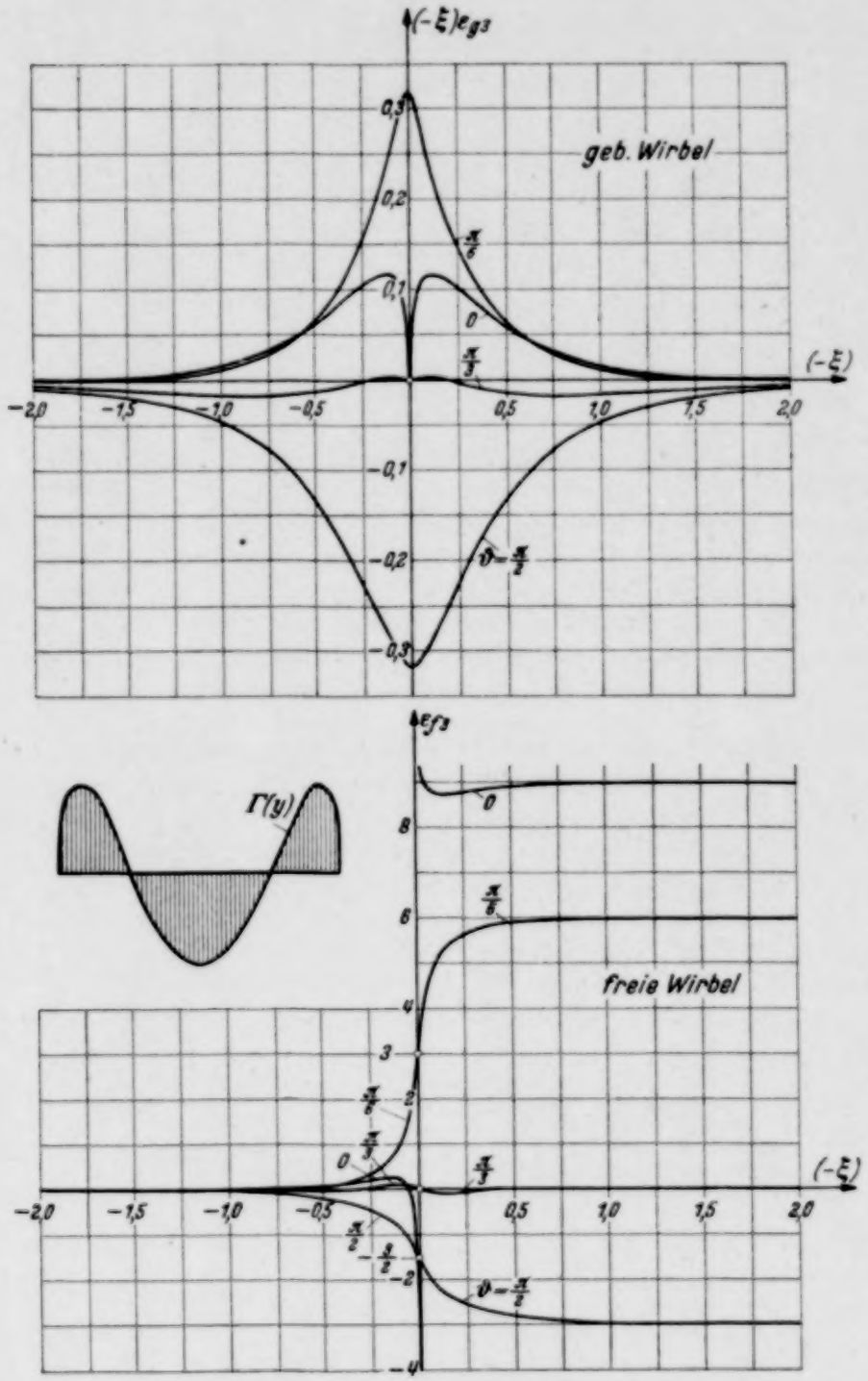

Abb. 6. Abwindfunktionen des dritten *Fourier*gliedes der Zirkulationsverteilung.

Für $\xi>\frac{1}{2}$ konnte die Aufteilung bei $\vartheta'=\vartheta$ unterbleiben. Für jedes Teilintervall wurde die Quadratur mit der *Gauß*schen Formel bei fünf Funktionswerten durchgeführt. Für die Berechnung der Integrale mit $\mu=3,5\ldots$ läßt sich das μ-fache des Arguments des cos zurückführen auf eine Summe von Potenzen des cos, wobei die höchste Potenz vom Grade μ ist. Hierdurch behält der Integrand in allen Fällen seine Charakteristik mit zwei Nullstellen bei, so daß die Quadratur ganz analog durchgeführt werden kann. Die Genauigkeit des Endresultates wird allerdings durch die anschließende Differenzbildung der Einzelquadraturen verringert. Es wurden im allgemeinen nur die Abwindanteile $\varepsilon_{g\,\mu}$ (Abwind des gebundenen Wirbels) und ε_μ (Gesamtabwind) berechnet und nur zur Kontrolle auch einige Werte von $\varepsilon_{f\,\mu}$ (Abwind der freien Wirbel). Zur graphischen Darstellung von $\varepsilon_{g\,\mu}$ und ε_μ ist es zweckmäßig, das Produkt $(-\xi)\,\varepsilon_\mu$ über ξ aufzutragen, da dieses für $\xi\longrightarrow 0$ gegen ein endlichen Wert geht. Der Verlauf der berechneten Abwindfunktionen ist aus Abb. 5 bis 7 zu ersehen. Die Zahlenwerte der Abwindfunktionen befinden sich im Anhang in Zahlentafel 5. Dort ist ebenfalls ein praktisches Rechenbeispiel für die Verwendung der Abwindtafeln aufgeführt (Zahlentafel 6a, b, c, d).

9. Anwendungsbeispiele. a) Elliptische Fläche. Wir wollen zunächst die Fläche mit elliptischem Grundriß bei gerader $l/4$-Linie betrachten, die wir nach dem $3l/4$-Theorem durch einen Einzelwirbel in der $l/4$-Linie ersetzen, wobei die Strömungsbedingung auf der $3l/4$-Linie erfüllt wird. Setzen wir elliptische Zirkulationsverteilung längs Spannweite voraus, wie dies die Traglinientheorie liefert, so haben wir zur Bestimmung des einen freien Koeffizienten a_1 der Zirkulationsverteilung die Abwindbedingung (5,7) in einem Aufpunkt der $3l/4$-Linie zu erfüllen, welche dann lautet

$$a_1\varepsilon_1 a_g=\alpha_g.$$

Mit (5, 10) erhalten wir für den Auftriebsanstieg

$$\frac{d c_a}{d \alpha_g} = \frac{\pi \Lambda}{2} \frac{1}{\varepsilon_1}. \tag{9,1}$$

Den Aufpunkt wählen wir im Symmetrieschnitt auf der $3l/4$-Linie der Tragfläche, wo sich die Abwindfunktion ε_1 in die Form überführen läßt

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\xi^2+1}}{\pi(-\xi)} E\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(E ist das elliptische Integral zweiter Gattung). Der Abstand $(-\xi)$ in diesem Punkte ist für die elliptische Fläche

$$(-\xi)_{\frac{3}{4}l} = \frac{4}{\pi \Lambda},$$

so daß wir aus (9, 1) erhalten

$$\frac{d c_a}{d \alpha_g} = \frac{2\pi\Lambda}{2 + \sqrt{\Lambda^2 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2}\, E\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}}, \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{9,2}$$

Diese Formel läßt sich vereinfachen, wenn wir für das elliptische Integral die Näherung einführen

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}, \frac{\pi}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)^2+1}{\xi^2+1}}.$$

Damit erhalten wir die auch von *H. Schlichting* in einem unveröffentlichten Bericht auf andere Weise gewonnene Formel

$$\frac{d c_a}{d \alpha_g} = \frac{2\pi\Lambda}{2 + \sqrt{\Lambda^2+4}}. \tag{9,3}$$

Die *Prandtl*sche Formel erhalten wir, wenn wir für den Abwind die für große Seitenverhältnisse gültige Näherung machen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi(-\xi)}.$$

Dann ergibt sich nämlich aus (9, 1)

$$\frac{d c_a}{d \alpha_g} = \frac{2\pi\Lambda}{2+\Lambda}. \tag{9,4}$$

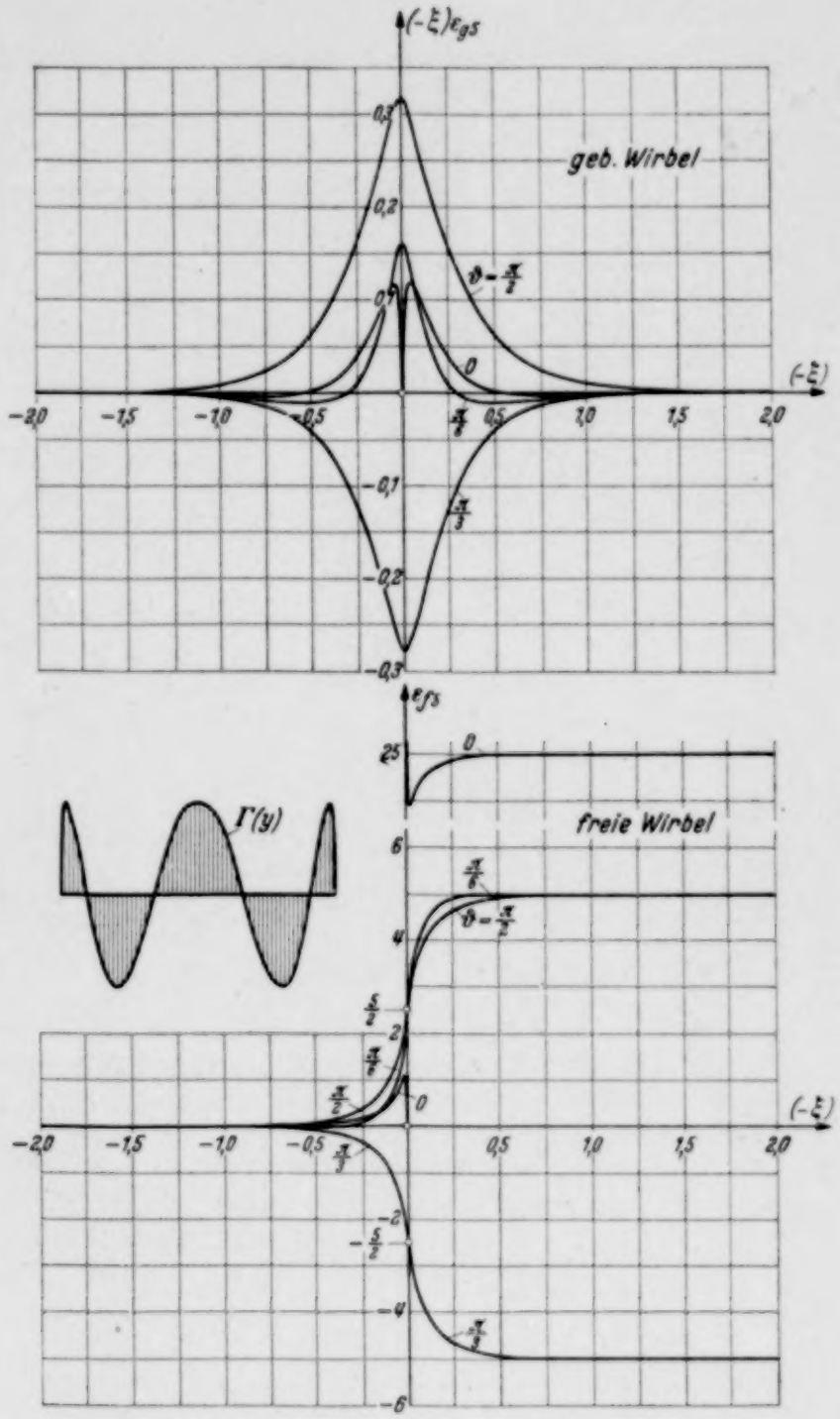

Abb. 7. Abwindfunktionen des fünften *Fourier*gliedes der Zirkulationsverteilung.

Einen Vergleich dieser Formeln zeigt Abb. 8, wo auch vergleichsweise die Werte für den Ellipsenflügel nach *K. Krienes*[1] eingetragen sind. Man kann den Auftriebsanstieg des Ellipsenflügels auch statt mit einem mit drei Aufpunkten längs Halbspannweite nach dem $3l/4$-Theorem ermitteln und erhält dann die ebenfalls in Abb. 8 eingetragenen Werte, die nur wenig von der Kurve nach (9, 2) abweichen. Dies besagt nichts anderes, als daß auch nach dem $3l/4$-Theorem der Ellipsenflügel näherungsweise eine elliptische Zirkulationsverteilung besitzt.

[1] *K. Krienes*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 65.

Zahlentafel 2. *Koeffizienten der Zirkulationsverteilung längs Spannweite, Auftriebsanstieg und Neutralpunktlage der ebenen Rechteckplatte nach dem 3l/4-Theorem mit einem Wirbel (n=1)*

Λ	1	3	6	10
a_1	0,910	0,658	0,444	0,307
a_3	0,003	0,018	0,031	0,035
a_5	0,000	0,000	0,002	0,004
$\frac{1}{2\pi}\frac{dc_a}{d\alpha_g}$	0,227	0,494	0,666	0,766
$\frac{dc_m}{dc_a}$	−1/4	−1/4	−1/4	−1/4

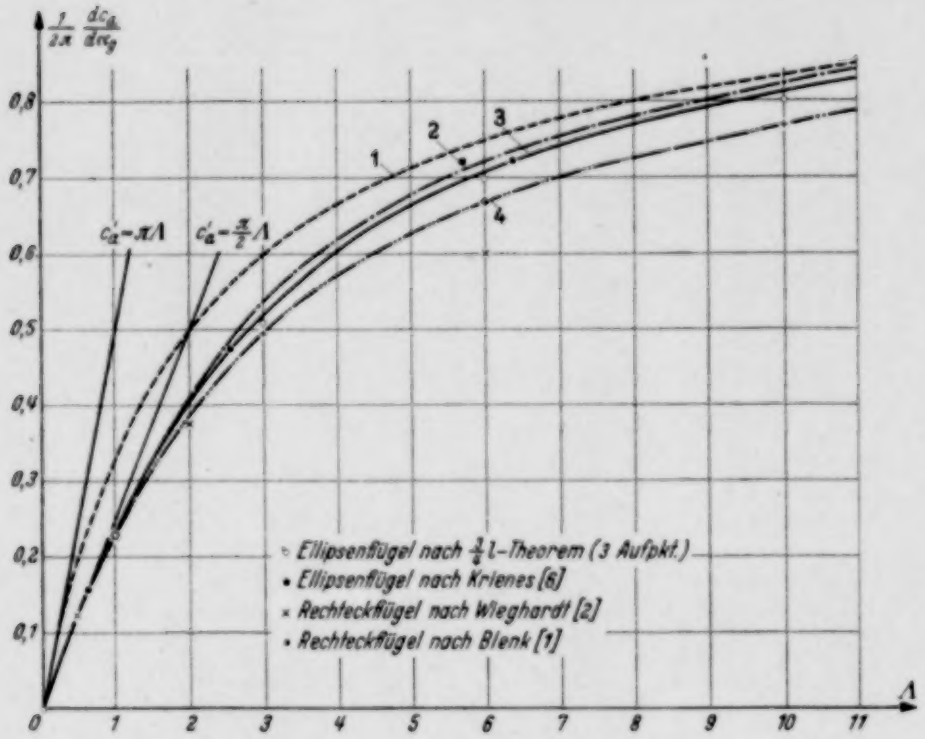

Abb. 8. Auftriebsanstieg der Ellipsen- und Rechteckfläche;
(1) Ellipsenfläche als tragende Linie, Gl. (9, 4),
(2) Ellipsenfläche nach 3l/4-Theorem, Gl. (9, 3),
(3) Ellipsenfläche nach 3l/4-Theorem, Gl. (9, 2),
(4) Rechteckfläche nach Streifenmethode mit drei Streifen. (9 Aufpunkte auf einer Flächenhälfte).

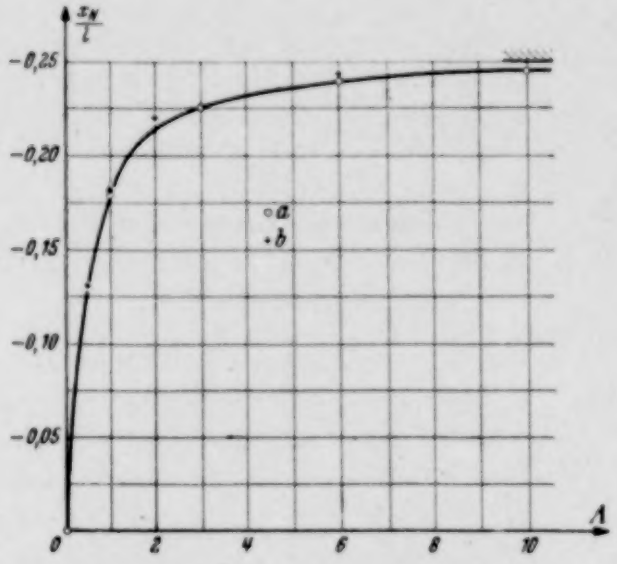

Abb. 9. Neutralpunktlage der ebenen Rechteckplatte bei endlichem Seitenverhältnis;
(a) Streifenmethode mit 3 Streifen (9 Aufpunkte),
(b) nach *Wieghardt*,
$\Lambda \to \infty : x_N/l = -1/4$.

Zahlentafel 3. *Koeffizienten der Zirkulationsverteilung der Streifenwirbel nach (5, 5), Auftriebsanstieg und Neutralpunktlage der ebenen Rechteckplatte bei Aufteilung in drei Streifenwirbel (n=3).*

Λ		1	3	6	10
1. Streifen	a_1	0,7151	0,4458	0,2877	0,1954
	a_3	0,0150	0,0280	0,0290	0,0264
	a_5	0,0002	0,0030	0,0040	0,0041
2. Streifen	b_1	0,1584	0,1516	0,1075	0,0754
	b_3	−0,0097	−0,0046	0,0036	0,0069
	b_5	−0,0003	−0,0021	−0,0010	0,0003
3. Streifen	c_1	0,0535	0,0685	0,0514	0,0369
	c_3	−0,0028	−0,0036	0,0002	0,0024
	c_5	0,0001	−0,0007	−0,0008	−0,0002
$\frac{1}{2\pi}\frac{dc_a}{d\alpha_g}$		0,231	0,499	0,670	0,769
$\frac{dc_m}{dc_a}$		−0,179	−0,228	−0,240	−0,245

b) Rechteckfläche. Die Rechteckfläche als ebene Platte wurde mit drei *Fourier*gliedern sowohl mit einem Wirbel ($n=1$) als auch mit drei Wirbeln ($n=3$) nach der Streifenmethode untersucht, Als Lösungen ergaben sich die in Zahlentafel 2 und 3 zusammengestellten Werte. Der Unterschied im Auftriebsanstieg und auch in der Auftriebsverteilung längs Spannweite ist hierbei gering. Wesentlich ist die bei drei Streifen ermittelte Abhängigkeit der Neutralpunktlage vom Seitenverhältnis, die auf eine veränderte Tiefenverteilung der Zirkulation hinweist. Eine graphische Auftragung gibt Abb. 9 im Vergleich mit den von *K. Wieghardt* ermittelten Werten, die hier trotz der von *Wieghardt* angenommenen elliptischen Zirkulationsverteilung noch in guter Übereinstimmung stehen. Der Verlauf des Auftriebsanstieges über A ist ebenfalls in Abb. 8 eingetragen und steht in guter Übereinstimmung mit dem von *H. Blenk* für $A=6$ ermittelten Wert, während die Werte nach *K. Wieghardt* für große Seitenverhältnisse wegen der angenommenen elliptischen Zirkulationsverteilung stark abweichen. Auftriebsverteilung längs Spannweite und örtliche Neutralpunktlage, berechnet mit drei Streifen, sind aus den Abb. 10 und 11 zu ersehen.

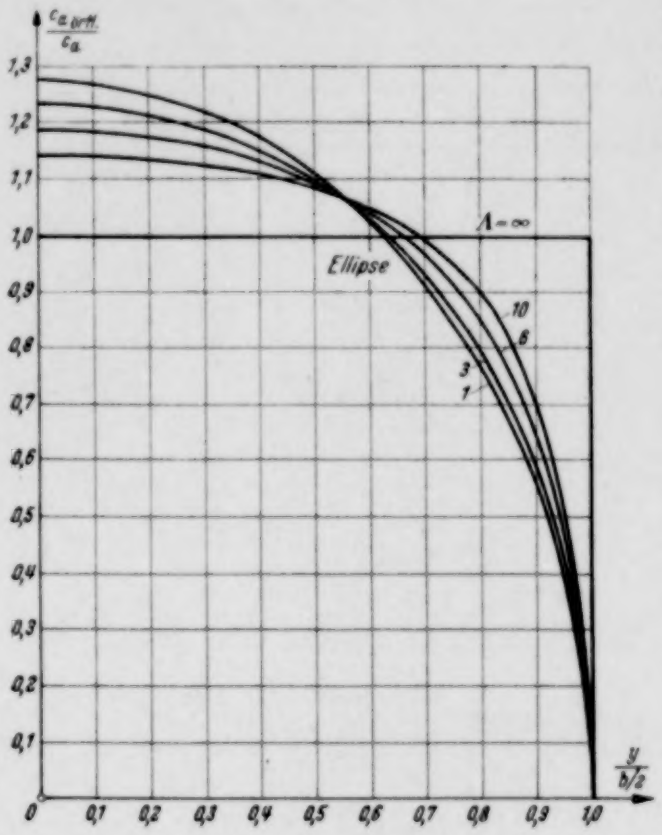

Abb. 10. Auftriebsverteilung der ebenen Rechteckplatte über Spannweite.

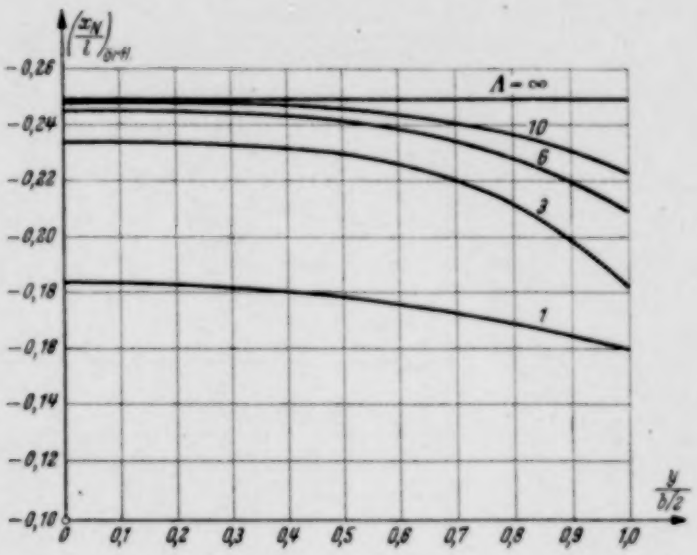

Abb. 11. Örtliche Neutralpunktlage der ebenen Rechteckplatte.

In gleicher Weise wie die ebene Platte wurden das Kreisbogenprofil mit $\alpha_g=0$ sowie das S-Schlagprofil mit $\alpha_g=\delta/4$ untersucht (für $A\longrightarrow\infty$ *Birnbaum*sche Normalfälle, Abb. 1). Als geometrische Bestimmungsgröße des Profils sind hierbei statt des Anstellwinkels α_g die Vorderkantenwinkel β bzw. δ einzuführen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Zahlentafel 4 zusammengestellt.

Zahlentafel 4. *Koeffizienten der Zirkulationsverteilung der Streifenwirbel nach (5, 5) für Kreisbogen- und S-Schlagprofil bei Aufteilung in drei Streifenwirbel ($n=3$).*

	Kreisbogenprofil $\alpha_g=0$					S-Schlagprofil $\alpha_g=\delta/4$			
A	1	3	6	10		1	3	6	10
1. Streifen a_1	−0,1736	−0,0121	0,0193	0,0190		0,2583	0,1292	0,0737	0,0468
1. Streifen a_3	−0,0149	−0,0192	−0,0108	−0,0048		0,0054	0,0129	0,0118	0,0092
1. Streifen a_5	−0,0002	−0,0030	−0,0031	−0,0020		−0,0001	0,0011	0,0020	0,0019
2. Streifen b_1	0,3731	0,1864	0,1093	0,0709		0,1229	0,0531	0,0296	0,0187
2. Streifen b_3	0,0144	0,0202	0,0165	0,0128		0,0105	0,0089	0,0056	0,0038
2. Streifen b_5	0,0002	0,0027	0,0030	0,0025		0,0004	0,0019	0,0013	0,0009
3. Streifen c_1	0,3983	0,1882	0,1060	0,0671		−0,4575	−0,1793	−0,0919	−0,0553
3. Streifen c_3	0,0132	0,0224	0,0184	0,0137		−0,0275	−0,0334	−0,0226	−0,0147
3. Streifen c_5	0,0004	0,0026	0,0034	0,0029		−0,0005	−0,0053	−0,0052	−0,0037
$\frac{1}{\pi}\frac{\partial c_a}{\partial \beta}$	0,300	0,543	0,698	0,785	$\frac{16}{3\pi}\frac{\partial c_m}{\partial \delta}$	0,721	0,812	0,806	0,794
$\frac{c_m}{c_a}$	−0,733	−0,601	−0,545	−0,519	—	—	—	—	—

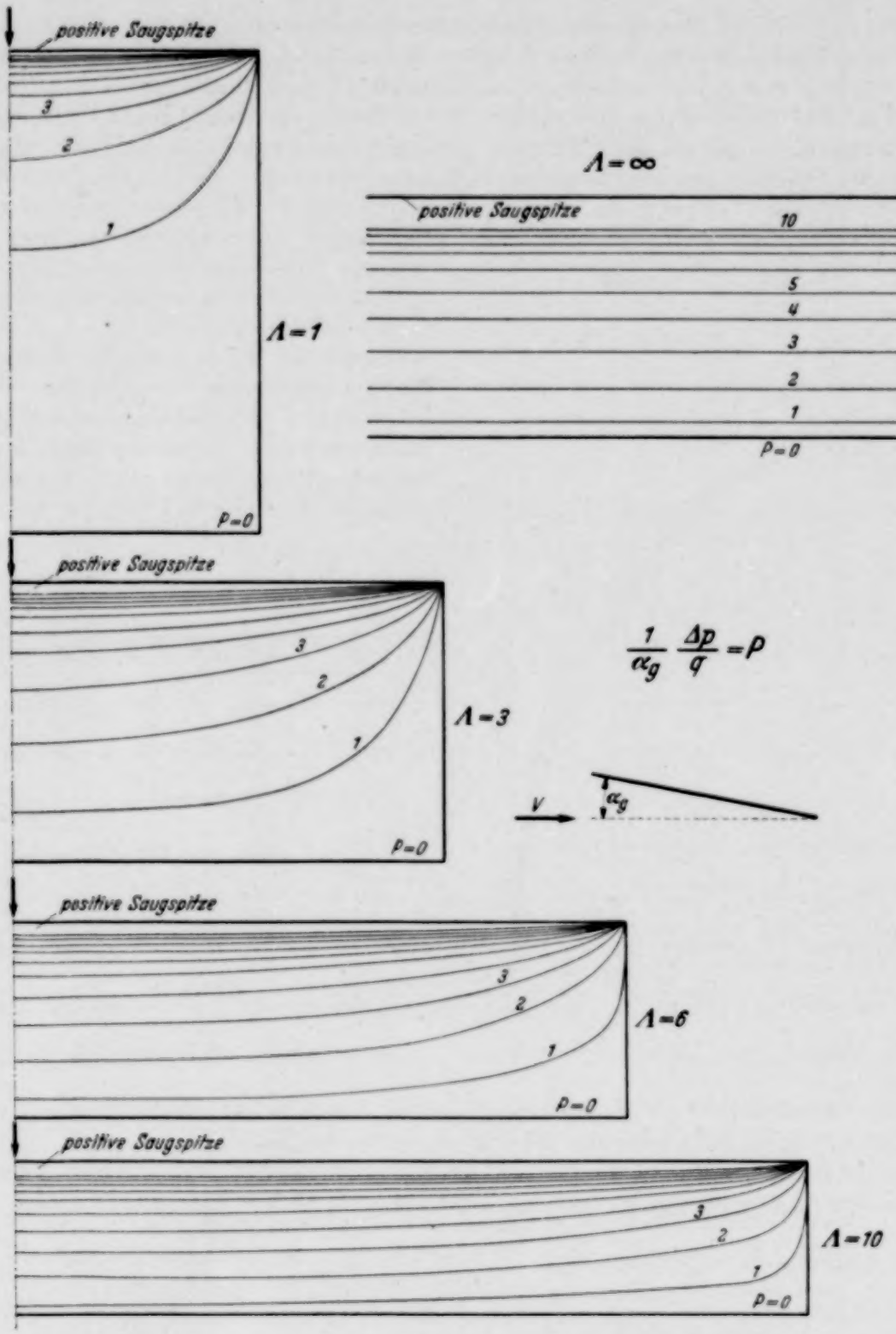

Abb. 12. Höhenschichtlinien der Lastverteilung an der ebenen Rechteckplatte.

Ferner wurde eine stetige Zirkulationsverteilung nach (7, 1) ermittelt. Hieraus lassen sich Linien gleicher Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Tragfläche (Niveaulinien) im Flügelgrundriß zeichnen, wie dies in Abb. 12 und 13 für die ebene Platte und das Kreisbogenprofil geschehen ist. Beim Kreisbogenprofil rückt der Druckberg mit abnehmendem Seitenverhältnis wegen der auftretenden negativen Saugspitze an der Vorderkante immer mehr nach hinten. Die Auftriebsverteilung über die Tiefe für ebene Platte, Kreisbogenprofil und S-Schlagprofil zeigt auch Abb. 14.

Es ist nicht schwer, durch Überlagerung von ebener Platte und Kreisbogenprofil die Werte für ein Kreisbogenprofil mit Anstellwinkel zu erhalten. Hierbei interessiert vor allem die Nullauftriebsrichtung und Nullauftriebsmoment. Für Nullauftrieb muß gelten

$$\frac{dc_a}{d\alpha_g}(\alpha_g)_{c_a=0}+\frac{dc_a}{d\beta}\beta=0,$$

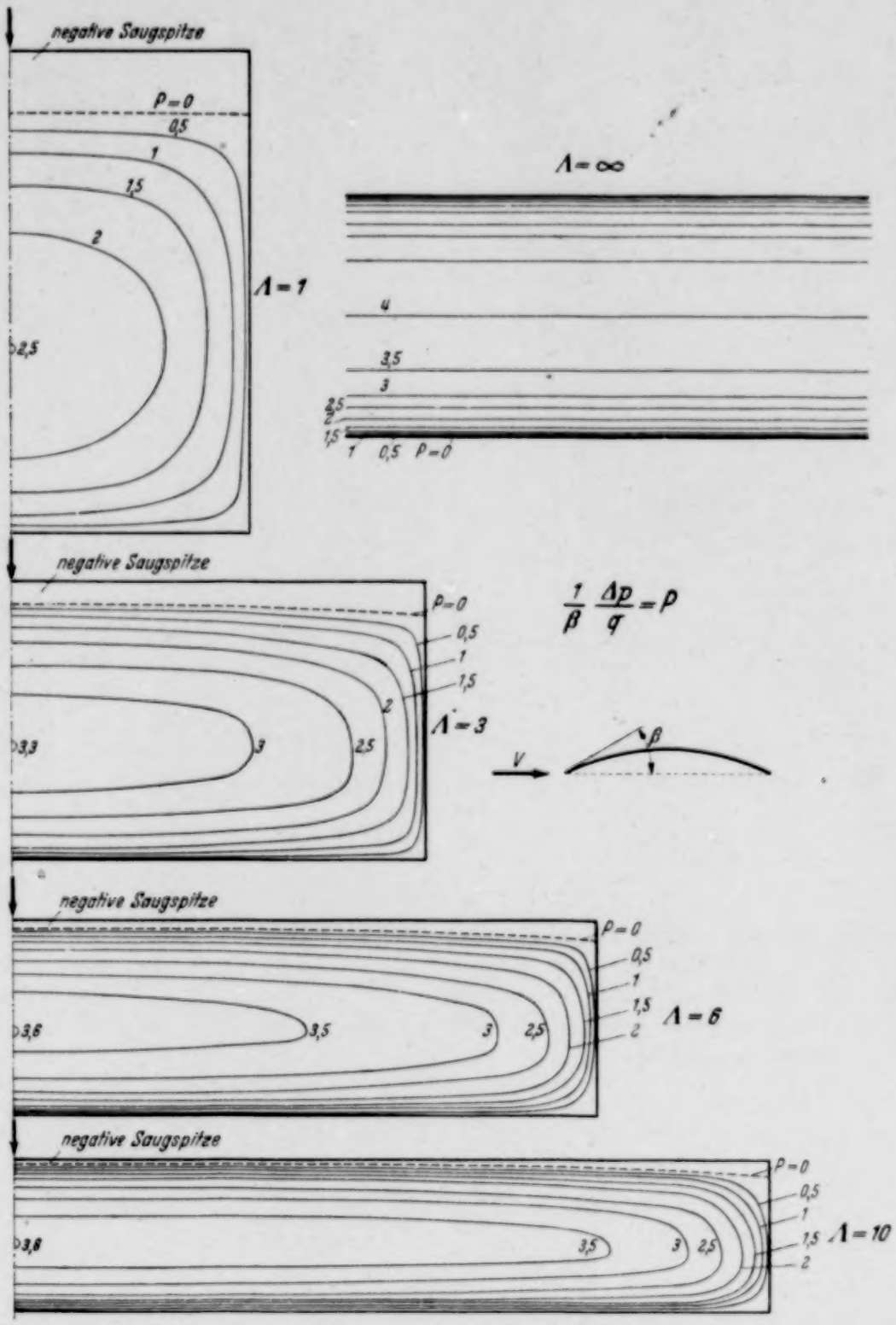

Abb. 13. Höhenschichtlinien der Lastverteilung an der Rechteckfläche mit Kreisbogenprofil.

woraus sofort die Nullauftriebsrichtung des Kreisbogenprofils folgt. Ihre Grenzwerte lassen sich angeben zu

$$\Lambda \to \infty: \quad (\alpha_g)_{c_a=0} = -\frac{\beta}{2}; \qquad \Lambda \to \infty: \quad (\alpha_g)_{c_a=0} = -\beta.$$

Das Moment bei Nullauftrieb wird dann

$$c_{m0} = \frac{d c_m}{d \alpha_g} (\alpha_g)_{c_a=0} + \frac{d c_m}{d \beta} \beta.$$

Analog zum Kreisbogenprofil läßt sich auch jede andere Profilkontur bei sehnenparalleler Anströmung nach der Streifenmethode berechnen und durch Überlagerung mit der ebenen Platte der Anstellwinkel erzeugen. Auftrieb und Moment der Fläche sind dann gegeben durch

$$c_a = \frac{d c_a}{d \alpha_g} \left[\alpha_g - (\alpha_g)_{c_a=0}\right], \qquad c_m = c_{m0} + \frac{d c_m}{d c_a} c_a.$$

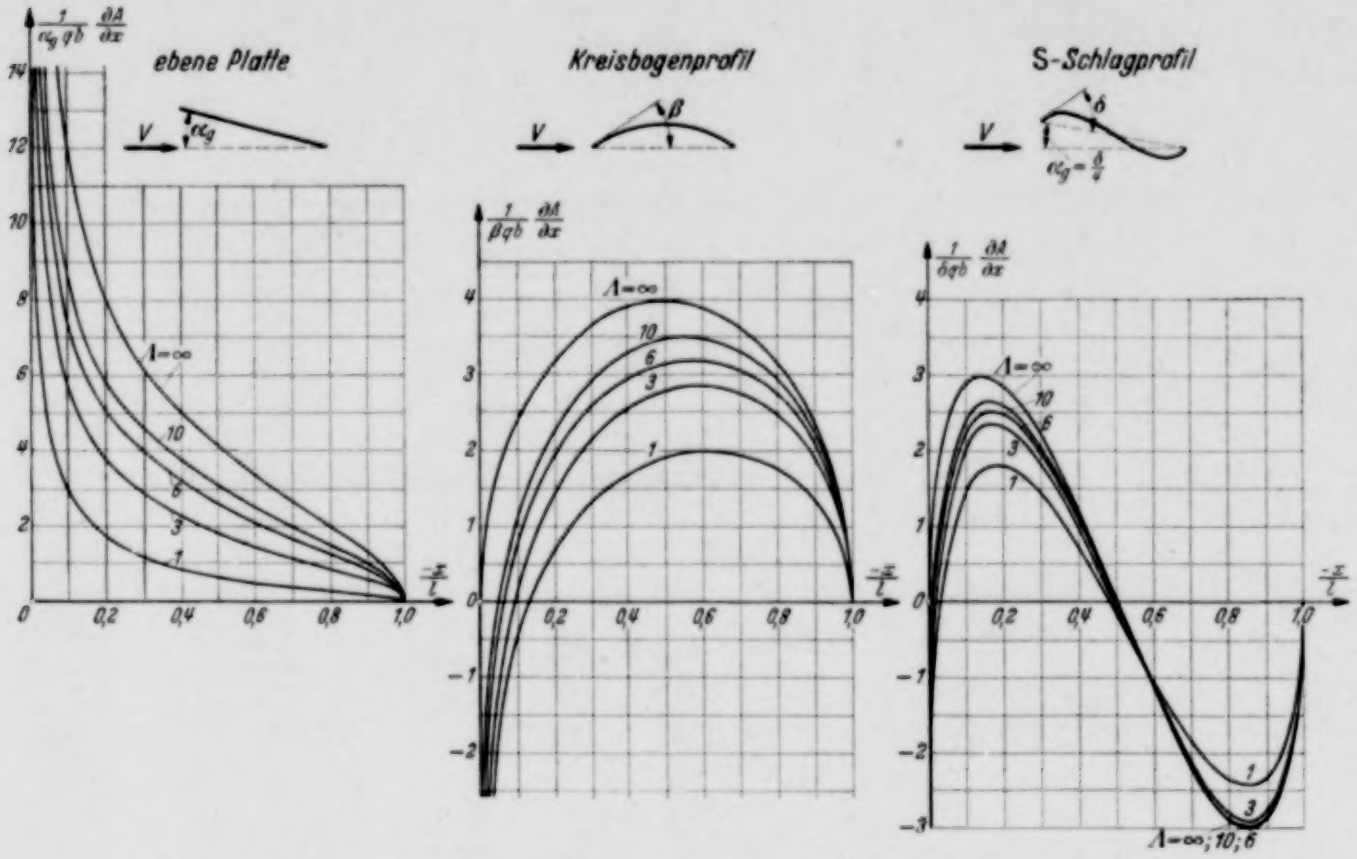

Abb. 14. Auftriebsverteilung der Rechteckfläche über die Tiefe für ebene Platte, Kreisbogen- und S-Schlagprofil.

Abb. 15 zeigt das c_{m0} des Kreisbogenprofiles in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis. Ebenso ist in Abb. 16 die Nullauftriebsrichtung und die Richtung des stoßfreien Eintritts für das Kreisbogenprofil wiedergegeben.

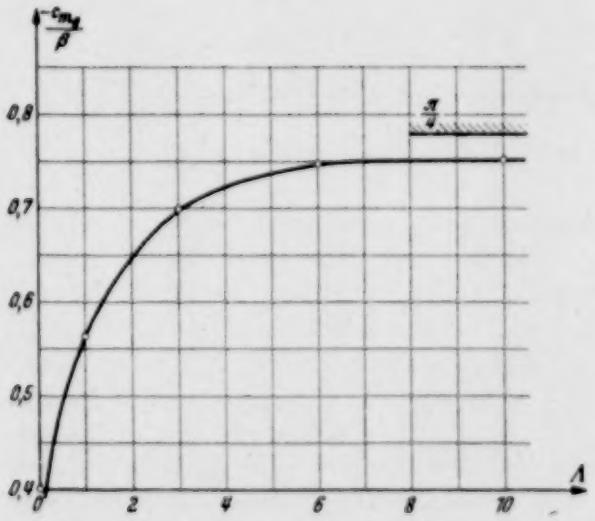

Abb. 15. Nullauftriebsmoment der Rechteckfläche mit Kreisbogenprofil;
$\Lambda \to \infty$: $c_{m0}/\beta = -\pi/4$.

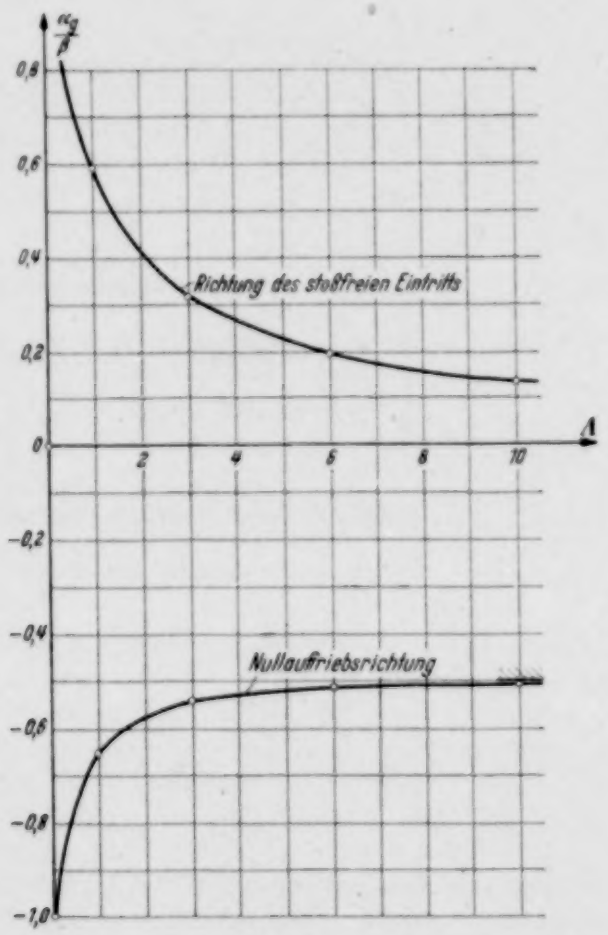

Abb. 16. Anstellwinkel der Rechteckfläche mit Kreisbogenprofil für Nullauftrieb und stoßfreien Eintritt;
$\Lambda \to 0$: $(\alpha_g)_{c_a=0}/\beta = -1$; $\Lambda \to \infty$: $(\alpha_g)_{c_a=0}/\beta = -1/2$.

Anhang.

Zahlentafel 5a. *Werte der Abwindfunktion ε_{f1} und ε_{g1}, erster Fourier-Term ($\mu=1$), nach Gl. (8, 3); (8, 4); (8, 5).*

$+\xi$	ε_{f1}				$(-\xi)\,\varepsilon_{g1}$				$(-\xi)\,\varepsilon_1$			
	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$
0	1/2	1/2	1/2	1/2	0,31831*	0,27567°	0,15915+	0	0,31831*	0,27567°	0,15915+	0
0,010	0,4850	0,4780	0,3844	−1,4612	0,31824	0,27560	0,15796	0,01871	0,31339	0,27083	0,15411	0,03332
0,025	0,4628	0,4530	0,3160	−0,7533	0,31785	0,27535	0,15652	0,02982	0,30628	0,26393	0,14862	0,04865
0,050	0,4306	0,4106	0,2250	−0,4228	0,31665	0,27386	0,15399	0,04146	0,29512	0,25333	0,14247	0,06260
0,075	0,4040	0,3741	0,1590	−0,2813	0,31499	0,27160	0,15044	0,05011	0,28470	0,24354	0,13852	0,07121
0,125	0,3612	0,3216	0,1028	−0,1486	0,31076	0,26642	0,14450	0,06291	0,26561	0,22622	0,13165	0,08149
0,175	0,3260	0,2808	0,0781	−0,0841	0,30551	0,26033	0,14088	0,07237	0,24845	0,21119	0,12721	0,08708
0,250	0,2815	0,2329	0,0648	−0,0339	0,29611	0,25023	0,13814	0,08290	0,22573	0,19201	0,12195	0,09138
0,375	0,2229	0,1768	0,0581	0,0043	0,27797	0,23300	0,13612	0,09450	0,19437	0,16668	0,11431	0,09287
0,500	0,1787	0,1394	0,0552	0,0206	0,25876	0,21681	0,13481	0,10147	0,16940	0,14714	0,10723	0,09117
0,625	0,1450	0,1128	0,0519	0,0279	0,23987	0,20192	0,13295	0,10549	0,14926	0,13141	0,10054	0,08808
0,750	0,1189	0,0934	0,0482	0,0307	0,22203	0,18862	0,13047	0,10743	0,13284	0,11858	0,09428	0,08439
0,875	0,0986	0,0786	0,0446	0,0313	0,20560	0,17664	0,12748	0,10791	0,11930	0,10786	0,08848	0,08049
1,000	0,0827	0,0671	0,0409	0,0311	0,19069	0,16587	0,12406	0,10782	0,10800	0,09882	0,08314	0,07673
1,250	0,0598	0,0502	0,0343	0,0279	0,16521	0,14703	0,11661	0,10414	0,09029	0,08429	0,07376	0,06925
1,500	0,0449	0,0388	0,0287	0,0245	0,14474	0,13145	0,10891	0,09945	0,07743	0,07325	0,06591	0,06277
1,750	0,0347	0,0307	0,0241	0,0212	0,12826	0,11842	0,10145	0,09416	0,06756	0,06461	0,05934	0,05698
2,500	0,0184	0,0171	0,0148	0,0138	0,09454	0,09014	0,08219	0,07860	0,04859	0,04738	0,04512	0,04406
3,500	0,0098	0,0094	0,0086	0,0083	0,06935	0,06750	0,06402	0,06230	0,03519	0,03470	0,03376	0,03331
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$^* = 1/\pi$ $\quad ^\circ = \sqrt{3}/2\pi$ $\quad ^+ = 1/2\pi$

Symmetriebedingung: $\varepsilon_{f\mu}(-\xi) = 2\,\varepsilon_{f\mu}(0) - \varepsilon_{f\mu}(+\xi)$; $\quad \varepsilon_{g\mu}(-\xi) = -\varepsilon_{g\mu}(+\xi)$; $\quad \varepsilon_{\mu}(-\xi) = 2\,\varepsilon_{f\mu}(0) - \varepsilon_{\mu}(+\xi)$.

Zahlentafel 5b. *Werte der Abwindfunktionen ε_{f3} und ε_{g3}, dritter Fourier-Term ($\mu=3$), nach Gl. (8,3); (8,4); (8,5).*

$+\xi$	ε_{f3}				$(-\xi)\varepsilon_{g3}$				$(-\xi)\varepsilon_3$			
	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$
0	−3/2	0	+3	+9/2	−0,3183*	0	+0,3183*	0	+0,3183*	0	+0,3183*	0
0,010	−1,400	+0,020	+2,532	−2,273	−0,3179	+0,0000	+0,3160	+0,0533	−0,3039	−0,3039	+0,2907	+0,0761
0,025	−1,261	+0,040	+2,064	−0,565	−0,3154	+0,0002	+0,3079	+0,0796	−0,2839	−0,0008	+0,2563	+0,0938
0,050	−1,066	+0,044	+1,554	+0,050	−0,3082	+0,0004	+0,2894	+0,1002	−0,2549	−0,0018	+0,2117	+0,0987
0,075	−0,9196	+0,0511	+1,2429	+0,1964	−0,2992	+0,0011	+0,2681	+0,1103	−0,2302	−0,0028	+0,1749	+0,0955
0,125	−0,7170	+0,0543	+0,7783	+0,2643	−0,2793	+0,0013	+0,2261	+0,1163	−0,1897	−0,0055	+0,1288	+0,0833
0,175	−0,5759	+0,0434	+0,5346	+0,2432	−0,2583	−0,0004	+0,1901	+0,1136	−0,1575	−0,0080	+0,0965	+0,0711
0,250	−0,4220	+0,0262	+0,3310	+0,1974	−0,2259	−0,0041	+0,1476	+0,1030	−0,1204	−0,0106	+0,0649	+0,0537
0,375	−0,2572	+0,0072	+0,1689	+0,1268	−0,1754	−0,0096	+0,0983	+0,0812	−0,0789	−0,0123	+0,0349	+0,0337
0,500	−0,1610	−0,0052	+0,0923	+0,0804	−0,1338	−0,0147	+0,0653	+0,0611	−0,0533	−0,0121	+0,0191	+0,0209
0,625	−0,1036	−0,0101	+0,0526	+0,0509	−0,1019	−0,0176	+0,0432	+0,0446	−0,0371	−0,0113	+0,0103	+0,0128
0,750	−0,0686	−0,0115	+0,0305	+0,0323	−0,0780	−0,0185	+0,0282	+0,0320	−0,0265	−0,0099	+0,0053	+0,0078
0,875	−0,0466	−0,0109	+0,0177	+0,0205	−0,0602	−0,0180	+0,0178	+0,0225	−0,0194	−0,0085	+0,0024	+0,0045
1,000	−0,0324	−0,0096	+0,0105	+0,0120	−0,0469	−0,0167	+0,0111	+0,0140	−0,0145	−0,0071	+0,0006	+0,0021
1,250	−0,0168	−0,0069	+0,0031	+0,0051	−0,0296	−0,0137	+0,0029	+0,0067	−0,0086	−0,0051	−0,0010	+0,0003
1,500	−0,0093	−0,0047	+0,0005	+0,0017	−0,0195	−0,0108	−0,0005	+0,0023	−0,0055	−0,0037	−0,0013	−0,0003
1,750	−0,0055	−0,0033	−0,0004	+0,0004	−0,0133	−0,0084	−0,0020	+0,0000	−0,0037	−0,0027	−0,0013	−0,0007
2,500	−0,0015	−0,0012	−0,0006	−0,0004	−0,0052	−0,0040	−0,0022	−0,0015	−0,0014	−0,0012	−0,0008	−0,0005
3,500	−0,0004	−0,0004	−0,0003	−0,0002	−0,0021	−0,0018	−0,0013	−0,0011	−0,0005	−0,0005	−0,0004	−0,0004
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

* $= 1/\pi$

Zahlentafel 5c. *Werte der Abwindfunktion ε_{f5} und ε_{g5}, fünfter Fourier-Term ($\mu=5$), nach Gl. (8,3); (8,4); (8,5).*

$+\xi$	ε_{f5}				$(-\xi)\varepsilon_{g5}$				$(-\xi)\varepsilon_5$			
	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$	$\vartheta=\frac{\pi}{3}$	$\vartheta=\frac{\pi}{6}$	$\vartheta=0$
0	+5/2	−5/2	+5/2	+25/2	+0,318*	−0,276°	+0,159+	0	+0,318*	−0,276°	+0,159+	0
0,010	+2,27	−2,22	+2,17	+3,14	+0,317	−0,274	+0,158	+0,081	+0,296	−0,251	+0,139	+0,095
0,025	+1,948	−1,856	+1,720	+1,010	+0,311	−0,268	+0,150	+0,109	+0,263	−0,221	+0,107	+0,097
0,050	+1,500	−1,384	+1,176	+0,722	+0,295	−0,252	+0,130	+0,177	+0,220	−0,183	+0,071	+0,081
0,075	+1,193	−1,135	+0,809	+0,610	+0,276	−0,236	+0,108	+0,111	+0,186	−0,151	+0,047	+0,063
0,125	+0,816	−0,762	+0,407	+0,405	+0,239	−0,200	+0,067	+0,088	+0,137	−0,105	+0,017	+0,038
0,175	+0,592	−0,512	+0,195	+0,262	+0,206	−0,164	+0,036	+0,066	+0,102	−0,074	+0,002	+0,020
0,250	+0,376	−0,297	+0,054	+0,124	+0,161	−0,117	+0,007	+0,037	+0,067	−0,043	−0,006	+0,006
0,375	+0,182	−0,129	+0,002	+0,032	+0,101	−0,067	−0,007	+0,012	+0,033	−0,018	−0,007	−0,000
0,500	+0,089	−0,060	−0,011	+0,008	+0,062	−0,039	−0,011	+0,002	+0,018	−0,009	−0,005	−0,003
0,625	+0,045	−0,029	−0,012	+0,002	+0,037	−0,023	−0,011	−0,002	+0,009	−0,004	−0,004	−0,004
0,750	+0,024	−0,012	−0,008	−0,000	+0,023	−0,012	−0,009	−0,004	+0,005	−0,002	−0,003	−0,004
0,875	+0,013	−0,006	−0,006	−0,001	+0,014	−0,006	−0,007	−0,004	+0,003	−0,001	−0,002	−0,003
1,000	+0,007	−0,003	−0,004	−0,002	+0,009	−0,003	−0,005	−0,003	+0,002	−0,001	−0,001	−0,002
1,250	+0,003	−0,001	−0,001	−0,001	+0,004	−0,001	−0,002	−0,002	+0,001	−0,000	−0,001	−0,001
1,500	+0,001	−0,001	−0,001	−0,000	+0,002	−0,000	−0,001	−0,001	+0,000	−0,000	−0,000	−0,000
1,750	+0,000	−0,000	−0,000	−0,000	+0,001	−0,000	−0,000	−0,001	+0,000	−0,000	−0,000	−0,000
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

* $= 1/\pi$ ° $= \sqrt{3}/2\pi$ + $= 1/2\pi$

Zahlentafel 6. *Rechenbeispiel für Rechteckplatte $l/b=1$* (Abb. 17).

Tafel 6a. *Gleichungssystem für eine ebene Rechteckplatte $b/l=1$ mit zwei Streifen ($n=2$) und drei Fouriergliedern ($\mu=1, 3, 5$) nach (5, 8).*

Abwindgl. in Aufpkt.	Abwind von Wirbel $\Gamma^{(1)}$			Abwind von Wirbel $\Gamma^{(2)}$			Örtlicher Anstellw. α_p/α_g
	1. Four. Gl.	2. Four. Gl.	3. Four. Gl.	1. Four. Gl.	2. Four. Gl.	3. Four. Gl.	
(1)	$a_1\varepsilon^{(1)}_{11}+a_3\varepsilon^{(1)}_{31}+a_3\varepsilon^{(1)}_{51}+b_1\varepsilon^{(2)}_{11}+b_3\varepsilon^{(2)}_{31}+b_5\varepsilon^{(2)}_{51}$						$=1$
(2)	$a_1\varepsilon^{(1)}_{12}+a_3\varepsilon^{(1)}_{32}+a_5\varepsilon^{(1)}_{52}+b_1\varepsilon^{(2)}_{12}+b_3\varepsilon^{(2)}_{32}+b_5\varepsilon^{(2)}_{52}$						$=1$
(3)	$a_1\varepsilon^{(1)}_{13}+a_3\varepsilon^{(1)}_{33}+a_5\varepsilon^{(1)}_{53}+b_1\varepsilon^{(2)}_{13}+b_3\varepsilon^{(2)}_{33}+b_5\varepsilon^{(2)}_{53}$						$=1$
. . . . .							

Tafel 6b. *Aus Abwindtafeln zu entnehmende Abwindwerte für die auftretenden Koordinaten ξ und ϑ.*

	$\vartheta=\frac{\pi}{2}$			$\vartheta=\frac{\pi}{3}$			$\vartheta=\frac{\pi}{6}$		
ξ	$-\xi\varepsilon_1$	$-\xi\varepsilon_3$	$-\xi\varepsilon_5$	$-\xi\varepsilon_1$	$-\xi\varepsilon_3$	$-\xi\varepsilon_5$	$-\xi\varepsilon_1$	$-\xi\varepsilon_3$	$-\xi\varepsilon_5$
1/2	0,1694	−0,0533	0,018	0,1471	−0,0121	−0,009	0,1072	0,0191	−0,005
3/2	0,0774	−0,0055	0,000	0,0733	0,0037	0,000	0,0659	−0,0013	0,000
ξ	ε_1	ε_3	ε_5	ε_1	ε_3	ε_5	ε_1	ε_3	ε_5
+1/2	−0,3388	0,1066	−0,036	−0,2942	0,0242	0,018	−0,2144	−0,0382	0,010
−1/2*	1,3388	−3,1066	5,036	1,2942	−0,0242	−5,018	1,2144	6,0382	4,990
+3/2	−0,0516	0,0037	0,000	−0,0489	0,0025	0,000	−0,0439	0,0009	0,000
−3/2*	1,0516	−3,0037	5,000	1,0489	−0,0025	−5,000	1,0439	5,9991	5,000

* Die Werte der Abwindfunktionen für negative ξ ergeben sich aus der Symmetriebedingung (8, 7c).

Tafel 6c. *Koeffizienten des zu lösenden Gleichungssystems von Tafel 6a mit den zugehörigen Koordinaten der Aufpunkte.*

Aufpunkt	von Wirbel $\Gamma^{(1)}$					von Wirbel $\Gamma^{(2)}$				
p	$\xi^{(1)}$	$\vartheta^{(1)}$	$\varepsilon^{(1)}_{1p}$	$\varepsilon^{(1)}_{3p}$	$\varepsilon^{(1)}_{5p}$	$\xi^{(2)}$	$\vartheta^{(2)}$	$\varepsilon^{(2)}_{1p}$	$\varepsilon^{(2)}_{3p}$	$\varepsilon^{(2)}_{5p}$
(1)		$\pi/2$	1,3388	−3,1066	5,036		$\pi/2$	−0,3388	0,1066	−0,036
(2)	$-\frac{1}{2}$	$\pi/3$	1,2942	−0,0242	−5,018	$+\frac{1}{2}$	$\pi/3$	−0,2942	0,0242	0,018
(3)		$\pi/6$	1,2144	6,0382	4,990		$\pi/6$	−0,2144	−0,0382	0,010
(4)		$\pi/2$	1,0516	−3,0037	5,000		$\pi/2$	1,3388	−3,1066	5,036
(5)	$-\frac{3}{2}$	$\pi/3$	1,0489	−0,0025	−5,000	$-\frac{1}{2}$	$\pi/3$	1,2942	−0,0242	−5,018
(6)		$\pi/6$	1,0439	5,9991	5,000		$\pi/6$	1,2144	6,0382	4,990

Tafel 6d. *Das zu lösende Gleichungssystem mit seinen Lösungen.*

Gleichungssystem:

Aufpunkt (1): $1{,}3388a_1-3{,}1066a_3+5{,}036a_5-0{,}3388b_1+0{,}1066b_3-0{,}036b_5=1,$
Aufpunkt (2): $1{,}2942a_1-0{,}0242a_3-5{,}018a_5-0{,}2942b_1+0{,}0242b_3+0{,}018b_5=1,$
Aufpunkt (3): $1{,}2144a_1+6{,}0392a_3+4{,}990a_5-0{,}2144b_1-0{,}0382b_3+0{,}010b_5=1,$
Aufpunkt (4): $1{,}0516a_1-3{,}0037a_3+5{,}000a_5+1{,}3388b_1-3{,}1066b_3+5{,}036b_5=1,$
Aufpunkt (5): $1{,}0489a_1-0{,}0025a_3-5{,}000a_5+1{,}2942b_1-0{,}0242b_3-5{,}018b_5=1,$
Aufpunkt (6): $1{,}0439a_1+5{,}9991a_3+5{,}000a_5+1{,}2144b_1+6{,}0382b_3+4{,}990b_5=1.$

Lösungen:

$a_1=0{,}800,\quad a_3=0{,}009,\quad a_5=0{,}000,\quad b_1=0{,}124,\quad b_3=-0{,}007,\quad b_5=0,$

$$\Gamma^{(1)}=V\cdot b[a_1\sin\vartheta+a_3\sin 3\vartheta+a_5\sin 5\vartheta]\alpha_g.$$
$$\Gamma^{(2)}=V\cdot b[b_1\sin\vartheta+b_3\sin 3\vartheta+b_5\sin 5\vartheta]\alpha_g.$$

Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig.

(Eingegangen am 8. April 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *N. Scholz*, (20b) Braunschweig, Wodanstraße 42.

Abb. 17. Beispiel für die Aufstellung des Gleichungssystems für eine Rechteckfläche $A=1$.

Zur Ermittlung der Einflußflächen und inneren Kräfte umfangsgelagerter Rechteckplatten.

Von W. Koepcke.

1. Einleitung. Rechteckige, senkrecht zu ihrer Mittelebene belastete und an ihrem Umfang laufend gestützte elastische Platten sind bereits in einer großen Zahl von Arbeiten behandelt worden. Der überwiegende Teil dieser Untersuchungen erstreckte sich aber nur auf die allseits drehbar gelagerte und allseits eingespannte Platte unter gleichmäßig verteilter oder dreieckförmiger Belastung oder einer Einzellast in der Mitte. Erst in neuerer Zeit haben *Bittner*[1] und *Pucher*[2] Methoden für die Darstellung von Einflußfeldern an rechteckigen Platten entwickelt und so die Möglichkeit gegeben, für jede beliebige Belastung die inneren Kräfte zu berechnen. In besonderem Maße haben die Arbeiten von *Pucher* dieses Problem geklärt.

Danach ist jedes Einflußfeld für eine beliebige statische Größe wie z. B. Durchbiegung, Biegungsmoment, Drillungsmoment oder Querkraft eine Biegefläche der Platte, die durch eine gewisse, jeder dieser Größen eigentümliche singuläre Lastgruppe erzeugt wird. Diese Singularitäten sind in dem Plattenpunkt anzubringen, für welchen das Einflußfeld ermittelt werden soll. Sie müssen weiterhin, da sie aus Kombinationen von Einzellasten oder deren Grenzübergängen bestehen, die homogene Differentialgleichung der Platte $\Delta\Delta w=0$ erfüllen. Außerdem haben die Einflußflächen an den Rändern den Auflagerbedingungen der untersuchten Platte zu genügen.

In bezug auf die Randbedingungen unterscheiden sich demnach die Einflußflächen nicht von den Biegeflächen, die durch stetig verteilte Belastungen erzeugt werden. Im allgemeinen werden aber weder die von den Singularitäten allein herrührenden Biegeflächen noch die Biegeflächen für stetig verteilte Lasten, welche durch die meist leicht anzugebenden Lösungen der inhomogenen Plattengleichung $\Delta\Delta w=p(\xi,\eta)/N$ beschrieben werden, die Lagerbedingungen längs der vorgegebenen Ränder erfüllen. Man schneidet deshalb aus ihnen einen die Last enthaltenden Bereich von den Abmessungen der zu untersuchenden Platte heraus und fügt weitere Flächen hinzu, die unabhängig von Feldbelastungen sein müssen, so daß die Summe aller Teilflächen sämtlichen Randbedingungen genügt. *Pucher* hat bei Berechnung von Einflußfeldern diese Zusatzflächen in seiner ersten Veröffentlichung mit Hilfe der Differenzenrechnung, in seinem zweiten Aufsatz durch biharmonische Polynome gewonnen. Da aber diese Rechnungen für jeden einzelnen Fall einen beträchtlichen Arbeitsaufwand erfordern, erscheint es angezeigt, ein Verfahren zu suchen, das eine Tabulierung zuläßt und es auf diese Weise ermöglicht, die ständig wiederkehrenden Rechenoperationen auf ein Mindestmaß einzuschränken.

Die anschließenden Darlegungen stellen im wesentlichen eine Erweiterung und zahlenmäßige Auswertung der vom Verfasser früher[3] ausführlich entwickelten Gedankengänge dar. Aus diesem Grunde wurden hier einzelne Abschnitte kurz gefaßt.

2. Erläuterung des Verfahrens. Es ist für die folgenden Betrachtungen ohne Belang, ob die zu untersuchende Platte durch stetig verteilte Belastungen, Einzellasten oder Einflußfeld-Singularitäten beansprucht wird.

Die Gleichung der Biegefläche einer Platte mit beliebiger Belastung muß bekanntlich die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{p(\xi,\eta)}{N} \tag{1}$$

erfüllen, wobei w die Durchbiegung, $p(\xi,\eta)$ die Lastfunktion, N die Plattensteifigkeit und ξ,η dimensionslose Koordinaten bedeuten. Bei singulären Lasten ist $p(\xi,\eta)=0$ zu setzen. Die der Gleichung (1) genügenden Biegeflächen, welche allein durch die Einflußfeld-Singularitäten oder die partikulären Integrale der Plattengleichung bei stetig verteilten Lasten gegeben sind, haben

---

[1] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Wien 1938.

[2] *A. Pucher*, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten. Heft 90 der Reihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1938; *A. Pucher*, Ing. Arch. 12 (1941), S. 76.

[3] *W. Koepcke*, Umfangsgelagerte Rechteckplatten mit drehbaren und eingespannten Rändern, Leipzig-Borna 1941.

zunächst keine Begrenzung. Man schneidet daher aus ihnen einen Bereich heraus, der die Belastung einschließt, und dessen Projektion gleich den Abmessungen $2a \cdot 2b$ der zu untersuchenden Platte ist (Abb. 1). Dieses so gewonnene Flächenstück sei mit w_p bezeichnet. Es hat an allen vier Rändern Durchbiegungen, Verdrehungen, Krümmungen und Querkräfte. Da im folgenden nur umfangsgelagerte Platten behandelt werden sollen, wird den Querkräften keine weitere Beachtung geschenkt. Von den dann an einem Rande übrig bleibenden drei Schnittgrößen ist je nach der Art der Lagerung bei einem eingespannten Rand die Durchbiegung und die Verdrehung oder bei einem frei drehbaren Rand die Durchbiegung und Krümmung zu beseitigen. Dies erfolgt in einzelnen Schritten. Zunächst werden die Randwerte an den Ecken von w_p durch den biharmonischen Ansatz

$$w_e = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi\eta + \varepsilon\xi^2 + \zeta\eta^2 + \chi\xi^2\eta + \vartheta\xi\eta^2 + \iota\xi^3 + \varkappa\eta^3 + \lambda\xi^3\eta + \mu\xi\eta^3 \qquad (2)$$

zum Verschwinden gebracht. Da an jeder der vier Ecken die Durchbiegung und die Verdrehung oder Krümmung nach beiden Koordinatenrichtungen zu Null gemacht werden müssen, enthält der Ausdruck für w_e zwölf Freiwerte α bis μ, welche so zu bestimmen sind, daß an den Ecken die neugebildete Fläche $w_0 = w_p + w_e$ die endgültige Lagerung besitzt. Die Abb. 2 gibt ein ungefähres Bild von w_0. Diese Fläche hat am Rand r_1 mit Ausschluß der Ecken die beiden Randwerte R_{01}, T_{01} (z. B. Durchbiegungen und Verdrehungen), die zu beseitigen sind; am Rand r_2 sind dies R_{02}, T_{02} usw.

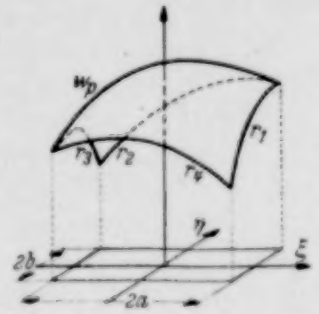

Abb. 1. Biegefläche w_p einer rechteckigen Platte.

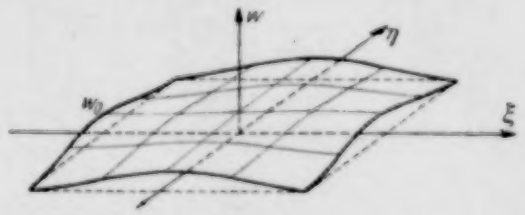

Abb. 2. Biegefläche $w_0 = w_p + w_e$ einer rechteckigen Platte.

Es wird nunmehr eine Fläche w_1 gebildet, die eine Lösung der Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ ist und des weiteren folgenden Bedingungen zu genügen hat: Es müssen an den r_1 benachbarten Rändern r_2 und r_4 sowie am gegenüberliegenden Rand r_3 die Durchbiegungen und je nach der endgültigen Auflagerung die Krümmungen oder Verdrehungen verschwinden und außerdem in dem Ausdruck für w_1 zwei Konstante enthalten sein, die so bestimmt werden, daß

$$R_{01} + R_{11} = 0, \qquad T_{01} + T_{11} = 0 \qquad (3)$$

sind, d. h. also, daß die Randwerte R_{11} und T_{11} von w_1 zusammen mit den entsprechenden Größen R_{01} und T_{01} von w_0 den endgültigen Auflagerbedingungen der gesuchten Platte längs r_1 genügen. Die Fläche $w_0 + w_1$ hat dann nur noch an den Rändern r_2, r_3 und r_4 vom Endzustand der Platte abweichende Randwerte, die aber allein von w_0 herrühren, da entsprechend den oben aufgestellten Forderungen an w_1

$$R_{12} = T_{12} = R_{13} = T_{13} = R_{14} = T_{14} = 0$$

sind. Nun kann eine zweite Fläche w_2 angegeben werden, die mittels zweier neuer Freiwerte die Randgleichungen

$$R_{02} + R_{22} = 0, \qquad T_{02} + T_{22} = 0$$

längs r_2 erfüllt und im übrigen den durch $w_0 + w_1$ längs r_1, r_3 und r_4 gewonnenen Zustand nicht verändert, also den Beziehungen

$$R_{21} = T_{21} = R_{23} = T_{23} = R_{24} = T_{24} = 0$$

genügt. In ganz entsprechender Weise verfährt man mit den Rändern r_3 und r_4 und erhält endlich als Gleichung der gesuchten Biegefläche, die allen Randbedingungen genügt, den Ausdruck

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 .$$

Durch Zerlegung von unsymmetrischen Belastungen in Symmetrie und Antimetrie kann die Rechenarbeit zur Ermittlung von w_1 bis w_4 beträchtlich vereinfacht werden.

3. Behandlung des Plattenrandes mit zwei drehbar gelagerten Nachbarrändern. In den folgenden Erörterungen wird vorausgesetzt, daß die Fläche w_0 für das zu behandelnde Problem bereits bestimmt worden ist. Die Ränder r_2 und r_4 seien im Endzustand der Platte drehbar gelagert; dagegen können r_3 und r_1 drehbar oder eingespannt sein, so daß sich im ganzen die vier in Abb. 3 dargestellten Möglichkeiten ergeben. Die Ermittlung der Fläche w_1 erfolgt nach bekannten Verfahren[1] und ist vom Verfasser an anderer Stelle[2] ausführlich dargelegt worden. Eine Wiederholung der Entwicklung kann deshalb unterbleiben; es sollen hier nur kurz die Gleichungen für w_1 getrennt nach Symmetrie und Antimetrie zur η-Achse angegeben werden.

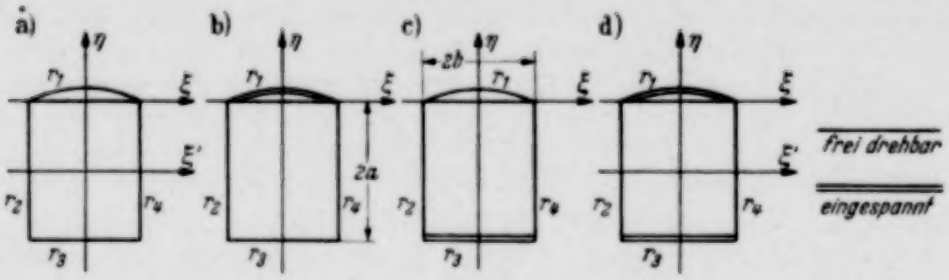

Abb. 3. Rechteckplatten, bei denen beide Nachbarränder des verbogenen Randes der Fläche w_1 drehbar gelagert sind.

a) Symmetrie: α) Drehbare Auflagerung von r_3:

$$w_1^s = \sum_{k=1,3,5\ldots} A_k \left[1 + \frac{\mathfrak{Cof}\, 2\beta\frac{a}{b}}{2A_k\frac{a}{b}}\eta\left(A_k\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\cos\beta\xi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\eta +$$

$$+ \sum_{k=1,3,5\ldots} B_k \left[1 + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}}{2B_k\frac{a}{b}}\eta\left(A_k\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\cos\beta\xi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\eta,\quad \beta = \frac{k\pi}{2};$$

β) Einspannung von r_3:

$$w_1^s = \sum_{k=1,3,5\ldots} A_k \left\{1 + \frac{\eta}{4A_k\beta\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left[2A_k\beta\frac{a}{b} + \mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\left(A_k\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\right\}\cos\beta\xi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\eta +$$

$$+ \sum_{k=1,3,5\ldots} B_k \left\{1 + \frac{\eta}{4B_k\beta\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left[2B_k\beta\frac{a}{b} + \mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b}\left(A_k\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\right\}\cos\beta\xi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\eta.$$

b) Antimetrie: α) Drehbare Auflagerung von r_3:

$$w_1^a = \sum_{k=2,4,6\ldots} A_k^* \left[1 + \frac{\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b}}{2A_k^*\frac{a}{b}}\eta\left(A_k^*\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k^*\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\sin\beta\xi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\eta +$$

$$+ \sum_{k=2,4,6\ldots} B_k^* \left[1 + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}}{2B_k^*\frac{a}{b}}\eta\left(A_k^*\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k^*\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\sin\beta\xi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\eta;$$

β) Einspannung von r_3

$$w_1^a = \sum_{k=2,4,6\ldots} A_k^* \left\{1 + \frac{\eta}{4A_k^*\beta\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left[2A_k^*\beta\frac{a}{b} + \mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\left(A_k^*\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k^*\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\right\}\sin\beta\xi\,\mathfrak{Cof}\,\beta\eta +$$

$$+ \sum_{k=2,4,6\ldots} B_k^* \left\{1 + \frac{\eta}{4B_k^*\beta\left(\frac{a}{b}\right)^2}\left[2B_k^*\beta\frac{a}{b} + \mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b}\left(A_k^*\mathfrak{Cof}\,2\beta\frac{a}{b} - B_k^*\mathfrak{Sin}\,2\beta\frac{a}{b}\right)\right]\right\}\sin\beta\xi\,\mathfrak{Sin}\,\beta\eta.$$

Die Konstanten A_k und B_k werden mit Hilfe einer *Fourier*schen Analyse der für die Auflagerung maßgebenden Randwerte von w_0 längs $\eta = 0$ berechnet. Ist w_0 nicht nur zur Achse η, sondern auch zur Achse ξ' (Abb. 3) symmetrisch oder antimetrisch, so kann man sich diese Tatsache zu Nutze machen und dadurch die obigen Gleichungen noch weiter vereinfachen. Da sich die Rechnungen verhältnismäßig einfach gestalten, erscheint hier eine Tabulierung nicht notwendig.

---

[1] *Estanave*, Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque usw., Dissertation Paris 1900.

[2] *W. Koepcke*, a. a. O.

4. Behandlung des Plattenrandes mit zwei eingespannten oder einem eingespannten und einem drehbar gelagerten Nachbarrand. Es wird wieder vorausgesetzt, daß w_0 bereits bekannt ist. Im Gegensatz zu den Darlegungen im dritten Abschnitt wird w_1 zunächst so berechnet, als ob der Rand r_3 unendlich weit entfernt liegt. Hat die zu untersuchende Platte in der Richtung der η-Achse die Länge 2α, so führt man durch w_1 im Abstande $\eta = -2\alpha$ einen Schnitt und entfernt auf diese Weise den bis ins Unendliche reichenden Teil der Fläche (Abb. 4). Da w_1, wie im folgenden gezeigt wird, längs der η-Achse nach einer gedämpften Schwingung verläuft, die rasch abklingt, sind die durch den Schnitt frei werdenden Randwerte bei $\eta = -2\alpha$ klein und können um so mehr unbeachtet bleiben, je größer 2α gegenüber 2 ist. Ist 2α wenig größer, gleich oder kleiner als 2, so wird es erforderlich sein, eine zweite Fläche w_1' auf entsprechende Weise wie w_1 zu bestimmen, die die Aufgabe hat, die kleinen Randwerte von w_1 längs $\eta = -2\alpha$ zu beseitigen. Auch w_1' ist ein unendlich langer Halbstreifen, der am Rande r_1 durchzuschneiden ist. Sind die durch diesen Schnitt entstandenen Randwerte noch so groß, daß sie sich bemerkbar machen, so ist eine dritte Fläche w_1'' zu berechnen, was aber nur in ganz seltenen Fällen notwendig sein wird. Die Einzelheiten, die bei Bestimmung der Flächen w_1' bzw. w_1'' zu beachten sind, werden weiter unten ausführlicher besprochen.

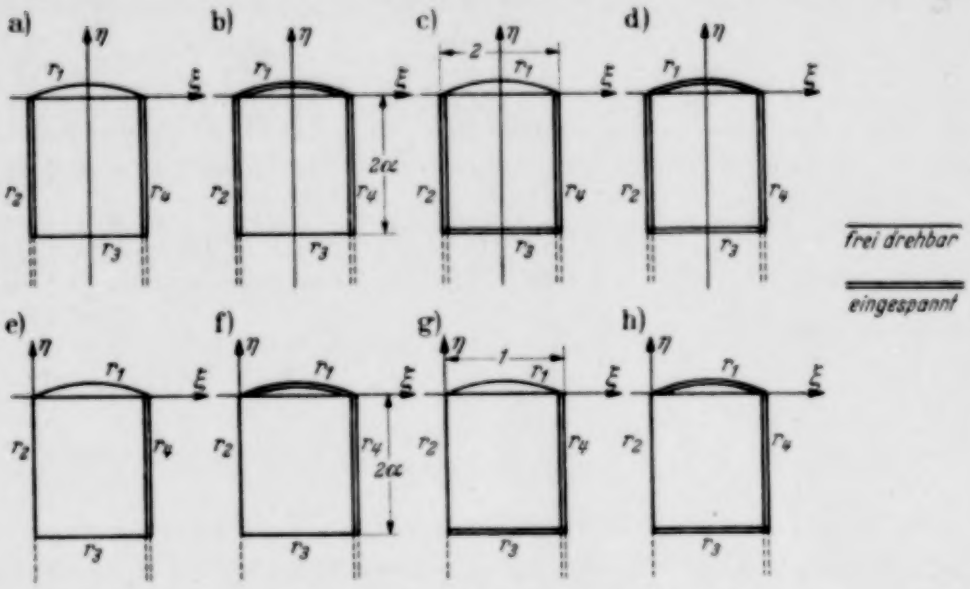

Abb. 4. Rechteckplatten, bei denen beide oder ein Nachbarrand des verbogenen Randes der Fläche w_1 eingespannt ist.

Durch die Benutzung eines Halbstreifens geht das Seitenverhältnis der Platte in die Rechnungen nicht unmittelbar ein, und man gewinnt daher die Möglichkeit einer weitgehenden Tabulierung.

Im folgenden werden die theoretischen Entwicklungen für den Fall dieses Abschnittes dargelegt, w_1 bei einem oder zwei eingespannten Nachbarrändern von r_1 zu berechnen.

Es wird vorausgesetzt, daß die Randwerte von w_0 längs r_1 in Symmetrie- und Antimetrieteil, bezogen auf die Achse η, zerlegt worden sind.

a) Symmetrieteil. Für w_1^s wird der Ansatz[1]

$$\left.\begin{aligned} w_1^s = &\sum_k \bar{C}_k e^{\omega_{sk}\eta}(\omega_{sk}\xi \sin\omega_{sk}\xi + \sin^2\omega_{sk}\cos\omega_{sk}\xi) + \\ &+ \sum_k C_k e^{\bar{\omega}_{sk}\eta}(\bar{\omega}_{sk}\xi \sin\bar{\omega}_{sk}\xi + \sin^2\bar{\omega}_{sk}\cos\bar{\omega}_{sk}\xi) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

gemacht. Bei

$$\begin{aligned} \omega_{s1} &= p_1 + q_1 i = \pm 2{,}106196 \pm 1{,}125365\, i, \\ \omega_{s2} &= p_2 + q_2 i = \pm 5{,}356269 \pm 1{,}551575\, i, \\ \omega_{s3} &= p_3 + q_3 i = \pm 8{,}536683 \pm 1{,}775544\, i \text{ usw.} \end{aligned}$$

verschwinden längs $\xi = \pm 1$ die Durchbiegungen und Verdrehungen von w_1^s. Die mit einem Querstrich versehenen Größen sind konjugiert komplex zu denen ohne Querstrich. Es bedeuten $C_k \equiv \Re C_k + i\,\Im C_k$ und $\bar{C}_k \equiv \Re C_k - i\,\Im C_k$. Führt man noch

$$\begin{aligned} \Phi_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\Phi_k(\xi,\eta) + i\,\Im\Phi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\omega_{sk}\eta}(\omega_{sk}\xi\sin\omega_{sk}\xi + \sin^2\omega_{sk}\cos\omega_{sk}\xi), \\ \bar{\Phi}_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\Phi_k(\xi,\eta) - i\,\Im\Phi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\bar{\omega}_{sk}\eta}(\bar{\omega}_{sk}\xi\sin\bar{\omega}_{sk}\xi + \sin^2\bar{\omega}_{sk}\cos\bar{\omega}_{sk}\xi) \end{aligned}$$

[1] *W. Koepcke*, a. a. O.

ein, so erhält man

$$w_1^s = \sum_k \left[\bar{C}_k \Phi_k(\xi,\eta) + C_k \bar{\Phi}_k(\xi,\eta)\right].$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich

$$w_1^s = 2 \sum_k \left[\Re\mathrm{e}\, C_k \,\Re\mathrm{e}\, \Phi_k(\xi,\eta) + \Im\mathrm{m}\, C_k \,\Im\mathrm{m}\, \Phi_k(\xi,\eta)\right], \tag{5}$$

und man erkennt, daß durch die Einführung der konjugiert komplexen Größen der Ausdruck für w_1^s reell geworden ist. Die Gleichung (5) enthält die beiden voneinander unabhängigen Konstanten $\Re\mathrm{e}\, C_k$ und $\Im\mathrm{m}\, C_k$, die benötigt werden, um die Randbedingungen längs r_1 zu erfüllen.

α) Es werde zunächst angenommen, daß r_1 im Endzustand eingespannt ist, w_1^s also bestimmte Durchbiegungen und Verdrehungen längs $\eta = 0$ anzunehmen hat, und zwar so, daß

$$w_{11}^s + f_s = 0, \qquad \left(\frac{\partial w_1^s}{\partial \eta}\right)_1 + \varphi_s = 0 \tag{6}$$

werden, wenn man unter w_{11}^s und $(\partial w_1^s/\partial \eta)_1$ die Durchbiegungen und Verdrehungen von w_1^s und unter f_s und φ_s die Durchbiegungen und Verdrehungen von w_0 am Rande r_1 versteht. Setzt man zur Abkürzung

$$\Phi_k \equiv \Re\mathrm{e}\, \Phi_k + i\, \Im\mathrm{m}\, \Phi_k \equiv \omega_{sk}\,\xi \sin \omega_{sk}\,\xi + \sin^2 \omega_{sk} \cos \omega_{sk}\,\xi,$$
$$\bar{\Phi}_k \equiv \Re\mathrm{e}\, \Phi_k - i\, \Im\mathrm{m}\, \Phi_k \equiv \bar{\omega}_{sk}\,\xi \sin \bar{\omega}_{sk}\,\xi + \sin^2 \bar{\omega}_{sk} \cos \bar{\omega}_{sk}\,\xi,$$

so werden bei r_1 für $\eta = 0$

$$\left.\begin{aligned} w_{11}^s &= \sum_k \left(\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k\right), \\ \left(\frac{\partial w_1^s}{\partial \eta}\right)_1 &= \sum_k \left(\bar{C}_k\, \omega_{sk}\, \Phi_k + C_k\, \bar{\omega}_{sk}\, \bar{\Phi}_k\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Es ist für die Übersichtlichkeit der Rechnung zweckmäßiger, im folgenden im Komplexen weiterzuarbeiten. Die noch unbekannten Konstanten C_k und $\bar{C}_k$ werden aus einer Minimalbedingung berechnet, und zwar wird die Forderung aufgestellt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen der zu berechnenden Randwerte von den gegebenen ein Minimum wird. Es ergibt sich dann

$$\Im = \int_{-1}^{+1} \left\{\left[f_s + \sum_k \left(\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k\right)\right]^2 + \left[\varphi_s + \sum_k \left(\bar{C}_k\, \omega_{sk}\, \Phi_k + C_k\, \bar{\omega}_{sk}\, \bar{\Phi}_k\right)\right]^2\right\} d\xi = \text{Min.} \tag{8}$$

Dieser Minimalansatz ist in der angeschriebenen Form ohne weiteres statthaft, da der Ausdruck (8) reell ist.

Man bezeichnet nunmehr mit k die laufende, mit h eine bestimmte Ordnungszahl der Reihenglieder in (8) und bildet die Ableitungen nach den beiden Unabhängigen $\Re\mathrm{e}\, C_h$ und $\Im\mathrm{m}\, C_h$.

$$\frac{\partial \Im}{\partial C_h}\,\frac{\partial C_h}{\partial \Re\mathrm{e}\, C_h} = -\,i\,\frac{\partial \Im}{\partial C_h}\,\frac{\partial C_h}{\partial \Im\mathrm{m}\, C_h}, \qquad \frac{\partial \Im}{\partial \bar{C}_h}\,\frac{\partial \bar{C}_h}{\partial \Re\mathrm{e}\, C_h} = i\,\frac{\partial \Im}{\partial \bar{C}_h}\,\frac{\partial \bar{C}_h}{\partial \Im\mathrm{m}\, C_h}.$$

Setzt man die so gewonnenen Ausdrücke gleich Null, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \left\{2\left[f_s + \sum_k \left(\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k\right)\right] \bar{\Phi}_h + 2\left[\varphi_s + \sum_k \left(\bar{C}_k\, \omega_{sk}\, \Phi_k + C_k\, \bar{\omega}_{sk}\, \bar{\Phi}_k\right)\right] \bar{\omega}_{sh}\, \bar{\Phi}_h\right\} d\xi = 0, \\ &\int_{-1}^{+1} \left\{2\left[f_s + \sum_k \left(\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k\right)\right] \Phi_h + 2\left[\varphi_s + \sum_k \left(\bar{C}_k\, \omega_{sk}\, \Phi_k + C_k\, \bar{\omega}_{sk}\, \bar{\Phi}_k\right)\right] \omega_{sh}\, \Phi_h\right\} d\xi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Die Trennung der Gleichungen (9) in Real- und Imaginärteil ergibt ein Gleichungssystem für die gesuchten Konstanten $\Re\mathrm{e}\, C_h$ und $\Im\mathrm{m}\, C_h$. Es ist aber nicht immer angebracht, diesen Weg zur Ermittlung von $\Re\mathrm{e}\, C_h$ und $\Im\mathrm{m}\, C_h$ einzuschlagen: denn der Minimalansatz soll erreichen, daß das Integral über jede einzelne der eckigen Klammern in den Gleichungen (9) in der Grenze zu Null wird.

Die Ansätze (9) können aber auch verschwinden, wenn z. B. das erste, durch f_s gekennzeichnete Glied eines Integrals einen großen Wert hat und das zweite, durch φ_s gekennzeichnete ebenso groß ist wie das erste Glied, aber ein umgekehrtes Vorzeichen besitzt. Unter solchen Umständen wäre die Minimalforderung nicht erfüllt, und es würden schlechte Ergebnisse zu erwarten sein.

Man kommt dagegen stets zum Ziel, wenn man beide Integrale (9) addiert. Es ergibt sich dann:

$$\int_{-1}^{+1} \Big\{ \Big[f_s + \sum_k (\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k) \Big] \Re\mathrm{e}\, \Phi_h + \\ + \Big[\varphi_s + \sum_k (\bar{C}_k \omega_{sk} \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk} \bar{\Phi}_k) \Big] (p_h \Re\mathrm{e}\, \Phi_h - q_h \Im\mathrm{m}\, \bar{\Phi}_h) \Big\} d\xi = 0 .$$

Der Minimalansatz hat nach dem oben Gesagten nur einen Sinn, wenn in der letzten Gleichung jede der eckigen Klammern wiederum für sich Null wird, also wenn

$$\int_{-1}^{+1} \Big[f_s + \sum_k (\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k) \Big] \Re\mathrm{e}\, \Phi_h \, d\xi = 0 , \tag{10a}$$

$$\int_{-1}^{+1} \Big[\varphi_s + \sum_k (\bar{C}_k \omega_{sk} \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk} \bar{\Phi}_k) \Big] (p_h \Re\mathrm{e}\, \Phi_h - q_h \Im\mathrm{m}\, \Phi_h) \, d\xi = 0 \tag{10b}$$

ist.

Die Gleichung (10b) kann aber auch unbrauchbar werden, nämlich wenn $p_h \Re\mathrm{e}\, \Phi_h - q_h \Im\mathrm{m}\, \Phi_h = 0$ ist. Um diese Möglichkeit auszuschließen, multipliziert man die runde Klammer aus und erhält

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \Big[\varphi_s + \sum_k (\bar{C}_k \omega_{sk} \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk} \bar{\Phi}_k) \Big] \, p_h \Re\mathrm{e}\, \Phi_h \, d\xi - \\ &- \int_{-1}^{+1} \Big[\varphi_s + \sum_k (\bar{C}_k \omega_{sk} \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk} \bar{\Phi}_k) \Big] \, q_h \Im\mathrm{m}\, \Phi_h d\xi = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Auch hier ist der Minimalansatz nur erfüllt, wenn jedes einzelne dieser beiden Integrale für sich Null ist. Da außer (10a) noch eine zweite Gleichung zur Ermittlung der Konstanten $\Re\mathrm{e}\, C_h$ und $\Im\mathrm{m}\, C_h$ benötigt wird, verwendet man weiter nach Division durch p_h das erste Integral in (11) und erhält als endgültige Bestimmungsgleichungen

$$\int_{-1}^{+1} \Big[f_s + \sum_k (\bar{C}_k \Phi_k + C_k \bar{\Phi}_k) \Big] \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi = 0 ,$$

$$\int_{-1}^{+1} \Big[\varphi_s + \sum_k (\bar{C}_k \omega_{sk} \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk} \bar{\Phi}_k) \Big] \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi = 0 .$$

Schreibt man für C_k, $\bar{C}_k$, Φ_k, $\bar{\Phi}_k$ die Real- und Imaginärteile, so entstehen nach kurzer Zwischenrechnung die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \Big[\Re\mathrm{e}\, C_k \int_{-1}^{+1} \Re\mathrm{e}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi + \Im\mathrm{m}\, C_k \int_{-1}^{+1} \Im\mathrm{m}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi \Big] = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_s \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi = Z_{hf} , \\ &\sum_k \Big\{ \Re\mathrm{e}\, C_k \Big[p_k \int_{-1}^{+1} \Re\mathrm{e}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi - q_k \int_{-1}^{+1} \Im\mathrm{m}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi \Big] + \\ &+ \Im\mathrm{m}\, C_k \Big[q_k \int_{-1}^{+1} \Re\mathrm{e}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi + p_k \int_{-1}^{+1} \Im\mathrm{m}\, \Phi_k \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi \Big] \Big\} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi_s \Re\mathrm{e}\, \Phi_h d\xi = Z_{h\varphi} . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Auf den linken Seiten durchlaufen k und h die Zahlen 1, 2, 3 . . . usw., $k \leqq h$. Für die Genauigkeit der Rechnung ist es in den meisten Fällen ausreichend, bis $h = 2$ zu gehen, also vier Gleichungen für die vier Unbekannten $\Re\mathrm{e}\, C_1$, $\Im\mathrm{m}\, C_1$, $\Re\mathrm{e}\, C_2$, $\Im\mathrm{m}\, C_2$ zu lösen. Bei höheren Ansprüchen kann auch noch $h = 3$ hinzugenommen werden.

β) Ist der Rand r_1 im Endzustand nicht eingespannt, sondern drehbar gelagert, so hat w_1^s längs $\eta = 0$ vorgegebene Durchbiegungen $(-f_s)$ und Krümmungen $(-\psi_s)$ anzunehmen, also

entsprechend (6) die Gleichungen

$$w_{11}^{*} + f_s = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 w_1{}^s}{\partial \eta^2}\right)_1 + \varphi_s = 0$$

zu erfüllen. Hierin bedeutet φ_s die Krümmung der Fläche w_0 längs des Randes r_1. Während sich w_{11}^{*} gegenüber (7) naturgemäß nicht ändert, wird

$$\left(\frac{\partial^2 w_1{}^s}{\partial \eta^2}\right)_1 = \sum_k \left(\bar{C}_k \omega_{sk}^2 \Phi_k + C_k \bar{\omega}_{sk}^2 \bar{\Phi}_k\right).$$

Ein Vergleich dieses Ausdruckes mit (7) zeigt, daß an Stelle von ω_{sk} und $\bar{\omega}_{sk}$ ihre Quadrate treten, im übrigen aber keine Veränderung vor sich geht. Setzt man $\omega_{sk}^2 = s_k + t_k i$ bzw. $\bar{\omega}_{sk}^2 = s_k - t_k i$, so können sämtliche Ableitungen des Abschnittes α) übernommen werden. In (12) sind nur p, q, φ_s und $Z_{h\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_s \Re\mathrm{e}\, \Phi_h \, d\xi$ durch s, t, ψ_s und $Z_{h\psi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_s \Re\mathrm{e}\, \Phi_h \, d\xi$ zu ersetzen.

b) Antimetrieteil. Ganz ähnlich wie bei dem Symmetrieteil gestalten sich auch die Rechnungen für den Fall der Antimetrie. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} w_1^a = &\sum_k \bar{C}_k^{*}\, e^{\omega_{ak}\eta}\left(\omega_{ak}\xi\cos\omega_{ak}\xi - \cos^2\omega_{ak}\sin\omega_{ak}\xi\right) + \\ &+ \sum_k C_k^{*}\, e^{\bar{\omega}_{ak}\eta}\left(\bar{\omega}_{ak}\xi\cos\bar{\omega}_{ak}\xi - \cos^2\bar{\omega}_{ak}\sin\bar{\omega}_{ak}\xi\right). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Die Größen ω_{ak} sind hier

$$\begin{aligned} \omega_{a1} &= p_1^{*} + q_1^{*} i = \pm\ 3{,}748838 \pm 1{,}384339\, i\,, \\ \omega_{a2} &= p_2^{*} + q_2^{*} i = \pm\ 6{,}949980 \pm 1{,}676105\, i\,, \\ \omega_{a3} &= p_3^{*} + q_3^{*} i = \pm 10{,}119259 \pm 1{,}858384\, i\,. \end{aligned}$$

Für diese Werte verschwinden an den Rändern $\xi = \pm 1$ die Durchbiegungen und Verdrehungen der Fläche (13).

Setzt man

$$\begin{aligned} \Psi_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) + i\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\omega_{ak}\eta}\left(\omega_{ak}\xi\cos\omega_{ak}\xi - \cos^2\omega_{ak}\sin\omega_{ak}\xi\right), \\ \bar{\Psi}_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) - i\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\bar{\omega}_{ak}\eta}\left(\bar{\omega}_{ak}\xi\cos\bar{\omega}_{ak}\xi - \cos^2\bar{\omega}_{ak}\sin\bar{\omega}_{ak}\xi\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich entsprechend den Entwicklungen beim Symmetrieteil

$$w_1^a = 2\sum_k \left[\bar{C}_k^{*}\,\Psi_k(\xi,\eta) + C_k^{*}\,\bar{\Psi}_k(\xi,\eta)\right]$$

und nach Ausmultiplikation

$$w_1^a = 2\sum_k \left[\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta)\right]. \tag{14}$$

Die Ermittlung der Konstanten $\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}$ und $\Im\mathrm{m}\,C_k^{*}$ erfolgt ebenfalls wie beim Symmetrieteil.

α) Ist der Rand r_1 im Endzustand eingespannt, so erhält man analog zu (12)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \left[\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right] = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi = Z_{hf}^{*}\,, \\ &\sum_k \Big\{\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\left[p_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi - q_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right] + \\ &\quad + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\left[q_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi + p_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right]\Big\} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi = Z_{h\varphi}^{*}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

β) Im Falle der drehbaren Auflagerung des Randes r_1 sind entsprechend den Darlegungen für den Symmetrieteil $p^{*}, q^{*}, \varphi_a, Z_{h\varphi}^{*} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi$ durch s^{*}, t^{*}, ψ_a, $Z_{h\psi}^{*} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi$ zu ersetzen, wobei s^{*} und t^{*} die Real- und Imaginäreteile von ω_a^2 darstellen.

Aus der Antimetriefläche w_1^a für Einspannung beider Nachbarränder ergibt sich auch die Fläche w_1 bei drehbarer Auflagerung des einen und Einspannung des anderen Nachbarrandes. Die Schnitte $\eta = \text{konst}$ durch w_1^a haben im wesentlichen den in Abb. 5 dargestellten Verlauf. Betrachtet man nur den rechten, ausgezogenen Teil der Kurve, so erkennt man, daß an der Stelle $\xi = 0$ Durchbiegung und Krümmung verschwinden, wogegen bei $\xi = 1$ Durchbiegung und Verdrehung zu Null werden. Demnach erfüllt also die Antimetriefläche w_1^a bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ die Bedingungen der Abb. 4e bis 4h an den Nachbarrändern von r_1, und man kann alle Ergebnisse des Abschnittes 4b) für $0 \leqq \xi \leqq 1$ übernehmen.

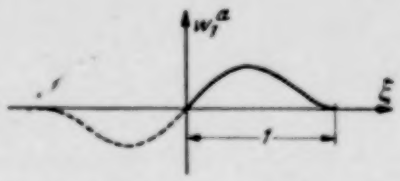

Abb. 5. Schnitt $\eta = \text{konst}$ durch eine antimetrische Fläche w_1^a.

c) Anstatt die Gleichungen (9) zu addieren, könnte man sie auch voneinander subtrahieren. Die Entwicklungen würden dann ganz entsprechend wie oben verlaufen und für Symmetrie und Antimetrie Gleichungssysteme liefern, die wie (12) bzw. (15) aussähen, nur wären $\Re e\, \Phi_h$ durch $\Im m\, \Phi_h$ bzw. $\Re e\, \Psi_h$ durch $\Im m\, \Psi_h$ zu ersetzen. Es verlohnt sich nicht, neben (12) und (15) auch noch diese neuen Gleichungen numerisch auszuwerten, da Zahlenrechnungen zeigen, daß bei ihrer Verwendung keine Verbesserungen der Ergebnisse erreicht werden.

5. Erläuterungen zu den Zahlentafeln. Die Verwendung eines Halbstreifens bei der Ermittlung von w_1 schaltet, wie bereits bemerkt, das Seitenverhältnis der zu untersuchenden Platte aus und ermöglicht so die Aufstellung von Zahlentafeln, die den Umfang der Rechnungen auf ein geringes Maß vermindern.

Zunächst können die Gleichungen (12) und (15) für Symmetrie und Antimetrie bei vorgegebenen Durchbiegungen und Verdrehungen oder vorgegebenen Durchbiegungen und Krümmungen am Rande r_1 ein für alle mal aufgestellt und in Abhängigkeit von den Z-Werten gelöst werden. Die Lösungsmatrizen für die Konstanten $\Re e\, C_h$ und $\Im m\, C_h$ bzw. $\Re e\, C_h^*$ und $\Im m\, C_h^*$ stehen im Tabellenteil unter **Ab** und **Bb**. Es sind jedesmal drei Fälle unterschieden, nämlich $h = 1$ (erste Näherung), $h = 1, 2$ (zweite Näherung) und $h = 1, 2, 3$ (dritte Näherung). Je höher der Grad der Näherung ist, desto genauer sind die Ergebnisse. Bei normalen Ansprüchen genügt es im allgemeinen, sich der zweiten Näherung zu bedienen.

In den Lösungsmatrizen sind nur die Größen $Z_{hf}, Z_{h\varphi}, Z_{h\psi}$ bzw. $Z_{hf}^*, Z_{h\varphi}^*, Z_{h\psi}^*$ von der jeweils gegebenen Fläche w_0 abhängig und in jedem Einzelfall besonders zu berechnen. Da die geschlossene Auflösung der Integrale Z_h der Gleichungen (12) und (15) meist sehr zeitraubend oder mitunter gar nicht durchführbar ist, wendet man am besten stets die *Simpson*sche Regel an. Aus diesem Grunde sind im Tabellenteil unter **Aa** und **Ba** die Funktionen $\Re e\, \Phi_1$, $\Re e\, \Phi_2$ bzw. $\Re e\, \Psi_1$, $\Re e\, \Psi_2$ in Intervallen von 0,05, die Funktionen $\Re e\, \Phi_3$, $\Re e\, \Psi_3$ in Intervallen von 0,025 längs der ξ-Achse zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ tabuliert.

Sind die Konstanten $\Re e\, C_h$ und $\Im m\, C_h$ bzw. $\Re e\, C_h^*$ und $\Im m\, C_h^*$ bekannt, so setzt man sie in (5) oder (14) ein und gewinnt auf diese Weise die gesuchten Biegeflächen $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ für $h = 1$ bis $h = 3$. Die zugehörigen Zahlentafeln sind unter **Ac** und **Bc** zu finden. Die Flächen $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ sind für $0 \leqq \xi \leqq 1$ und $\eta \leqq 0$ in Intervallen von 0,2 nach beiden Achsrichtungen berechnet. Die Intervallteilung der Flächen $w_{1(h)}^a$ ergibt bei ihrer Anwendung auf die in Abb. 4e bis 4h dargestellten Platten ein Maschennetz, das doppelt so weit ist als dasjenige der Platten der Abb. 4a bis 4d. Aus Raummangel konnten die Tafeln für eine engere Teilung hier nicht zum Abdruck kommen, doch wird bei den meisten Aufgaben der Platten der Abb. 4e bis 4h auch die größere Maschenweite ausreichen.

Des weiteren enthalten die Zahlentafeln unter **Ad** und **Bd** Werte für die Verdrehungen der Flächen $w_{1(h)}$ in Richtung der η-Achse, die benötigt werden, wenn die Verdrehungen am gegenüberliegenden Rande r_3 anzugeben sind. Schließlich sind in den Tafeln **Ae** und **Be** die Krümmungen von $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ nach η und in den Tafeln **Af** und **Bf** nach ξ enthalten, mit deren Hilfe die Biegungsmomente der Flächen w_1 berechnet werden können.

Es sind nun noch einige Bemerkungen über die Bestimmung der Flächen w_1' und w_1'' zu machen, worüber schon oben kurz gesprochen wurde. Der unendliche Halbstreifen der Fläche w_1 wird am Rande r_3 durchgeschnitten, es entstehen daher an dieser Stelle freie Randwerte, die durch geeignete Maßnahmen beseitigt werden müssen. Das geschieht durch eine Fläche w_1', die vom Rande r_3 beginnend nach r_1 zu abklingt und bei r_3 die umgekehrten Randwerte von w_1 hat.

entsprechend (6) die Gleichungen

$$w_{11}^{s} + f_s = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 w_1{}^s}{\partial \eta^2}\right)_1 + \psi_s = 0$$

zu erfüllen. Hierin bedeutet ψ_s die Krümmung der Fläche w_0 längs des Randes r_1. Während sich w_{11}^{s} gegenüber (7) naturgemäß nicht ändert, wird

$$\left(\frac{\partial^2 w_1{}^s}{\partial \eta^2}\right)_1 = \sum_k \left(\bar{C}_k\, \omega_{sk}^2\, \Phi_k + C_k\, \bar{\omega}_{sk}^2\, \bar{\Phi}_k\right).$$

Ein Vergleich dieses Ausdruckes mit (7) zeigt, daß an Stelle von ω_{sk} und $\bar{\omega}_{sk}$ ihre Quadrate treten, im übrigen aber keine Veränderung vor sich geht. Setzt man $\omega_{sk}^2 = s_k + t_k\, i$ bzw. $\bar{\omega}_{sk}^2 = s_k - t_k\, i$, so können sämtliche Ableitungen des Abschnittes α) übernommen werden. In (12) sind nur p, q, φ_s und $Z_{h\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_s\, \Re\mathrm{e}\, \Phi_h\, d\xi$ durch s, t, ψ_s und $Z_{h\psi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_s\, \Re\mathrm{e}\, \Phi_h\, d\xi$ zu ersetzen.

b) Antimetrieteil. Ganz ähnlich wie bei dem Symmetrieteil gestalten sich auch die Rechnungen für den Fall der Antimetrie. Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} w_1^a = &\sum_k \bar{C}_k^{*}\, e^{\omega_{ak}\,\eta}\left(\omega_{ak}\,\xi\cos\omega_{ak}\,\xi - \cos^2\omega_{ak}\sin\omega_{ak}\,\xi\right) + \\ &+ \sum_k C_k^{*}\, e^{\bar{\omega}_{ak}\,\eta}\left(\bar{\omega}_{ak}\,\xi\cos\bar{\omega}_{ak}\,\xi - \cos^2\bar{\omega}_{ak}\sin\bar{\omega}_{ak}\,\xi\right). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die Größen ω_{ak} sind hier

$$\begin{aligned} \omega_{a1} &= p_1^{*} + q_1^{*}\, i = \pm\ 3{,}748838 \pm 1{,}384339\, i\,, \\ \omega_{a2} &= p_2^{*} + q_2^{*}\, i = \pm\ 6{,}949980 \pm 1{,}676105\, i\,, \\ \omega_{a3} &= p_3^{*} + q_3^{*}\, i = \pm 10{,}119259 \pm 1{,}858384\, i\,. \end{aligned}$$

Für diese Werte verschwinden an den Rändern $\xi = \pm 1$ die Durchbiegungen und Verdrehungen der Fläche (13).

Setzt man

$$\begin{aligned} \Psi_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) + i\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\omega_{ak}\,\eta}\left(\omega_{ak}\,\xi\cos\omega_{ak}\,\xi - \cos^2\omega_{ak}\sin\omega_{ak}\,\xi\right), \\ \bar{\Psi}_k(\xi,\eta) &\equiv \Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) - i\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta) \equiv e^{\bar{\omega}_{ak}\,\eta}\left(\bar{\omega}_{ak}\,\xi\cos\bar{\omega}_{ak}\,\xi - \cos^2\bar{\omega}_{ak}\sin\bar{\omega}_{ak}\,\xi\right), \end{aligned}$$

so ergibt sich entsprechend den Entwicklungen beim Symmetrieteil

$$w_1^a = 2\sum_k \left[\bar{C}_k^{*}\,\Psi_k(\xi,\eta) + C_k^{*}\,\bar{\Psi}_k(\xi,\eta)\right]$$

und nach Ausmultiplikation

$$w_1^a = 2\sum_k \left[\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_k(\xi,\eta) + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\,\Im\mathrm{m}\,\Psi_k(\xi,\eta)\right]. \qquad (14)$$

Die Ermittlung der Konstanten $\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}$ und $\Im\mathrm{m}\,C_k^{*}$ erfolgt ebenfalls wie beim Symmetrieteil.

α) Ist der Rand r_1 im Endzustand eingespannt, so erhält man analog zu (12)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k \left[\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right] = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi = Z_{hf}^{*}\,, \\ &\sum_k \Big\{\Re\mathrm{e}\,C_k^{*}\left[p_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi - q_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right] + \\ &\quad + \Im\mathrm{m}\,C_k^{*}\left[q_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Re\mathrm{e}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi + p_k^{*}\int_{-1}^{+1}\Im\mathrm{m}\,\Psi_k\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi\right]\Big\} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi = Z_{h\varphi}^{*}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

β) Im Falle der drehbaren Auflagerung des Randes r_1 sind entsprechend den Darlegungen für den Symmetrieteil $p^{*}, q^{*}, \varphi_a, Z_{h\varphi}^{*} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi$ durch $s^{*}, t^{*}, \psi_a, Z_{h\psi}^{*} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi_a\,\Re\mathrm{e}\,\Psi_h\,d\xi$ zu ersetzen, wobei s^{*} und t^{*} die Real- und Imaginäreteile von ω_a^2 darstellen.

Aus der Antimetriefläche w_1^a für Einspannung beider Nachbarränder ergibt sich auch die Fläche w_1 bei drehbarer Auflagerung des einen und Einspannung des anderen Nachbarrandes. Die Schnitte $\eta = \text{konst}$ durch w_1^a haben im wesentlichen den in Abb. 5 dargestellten Verlauf. Betrachtet man nur den rechten, ausgezogenen Teil der Kurve, so erkennt man, daß an der Stelle $\xi = 0$ Durchbiegung und Krümmung verschwinden, wogegen bei $\xi = 1$ Durchbiegung und Verdrehung zu Null werden. Demnach erfüllt also die Antimetriefläche w_1^a bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ die Bedingungen der Abb. 4e bis 4h an den Nachbarrändern von r_1, und man kann alle Ergebnisse des Abschnittes 4b) für $0 \leqq \xi \leqq 1$ übernehmen.

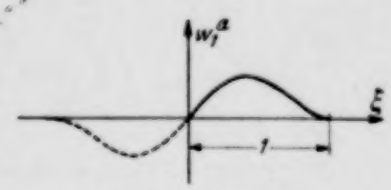

Abb. 5. Schnitt $\eta = \text{konst}$ durch eine antimetrische Fläche w_1^a.

c) Anstatt die Gleichungen (9) zu addieren, könnte man sie auch voneinander subtrahieren. Die Entwicklungen würden dann ganz entsprechend wie oben verlaufen und für Symmetrie und Antimetrie Gleichungssysteme liefern, die wie (12) bzw. (15) aussähen, nur wären $\Re e\, \Phi_h$ durch $\Im m\, \Phi_h$ bzw. $\Re e\, \Psi_h$ durch $\Im m\, \Psi_h$ zu ersetzen. Es verlohnt sich nicht, neben (12) und (15) auch noch diese neuen Gleichungen numerisch auszuwerten, da Zahlenrechnungen zeigen, daß bei ihrer Verwendung keine Verbesserungen der Ergebnisse erreicht werden.

5. Erläuterungen zu den Zahlentafeln. Die Verwendung eines Halbstreifens bei der Ermittlung von w_1 schaltet, wie bereits bemerkt, das Seitenverhältnis der zu untersuchenden Platte aus und ermöglicht so die Aufstellung von Zahlentafeln, die den Umfang der Rechnungen auf ein geringes Maß vermindern.

Zunächst können die Gleichungen (12) und (15) für Symmetrie und Antimetrie bei vorgegebenen Durchbiegungen und Verdrehungen oder vorgegebenen Durchbiegungen und Krümmungen am Rande r_1 ein für alle mal aufgestellt und in Abhängigkeit von den Z-Werten gelöst werden. Die Lösungsmatrizen für die Konstanten $\Re e\, C_h$ und $\Im m\, C_h$ bzw. $\Re e\, C_h^*$ und $\Im m\, C_h^*$ stehen im Tabellenteil unter **Ab** und **Bb**. Es sind jedesmal drei Fälle unterschieden, nämlich $h = 1$ (erste Näherung), $h = 1, 2$ (zweite Näherung) und $h = 1, 2, 3$ (dritte Näherung). Je höher der Grad der Näherung ist, desto genauer sind die Ergebnisse. Bei normalen Ansprüchen genügt es im allgemeinen, sich der zweiten Näherung zu bedienen.

In den Lösungsmatrizen sind nur die Größen $Z_{hf}, Z_{h\varphi}, Z_{h\psi}$ bzw. $Z_{hf}^*, Z_{h\varphi}^*, Z_{h\psi}^*$ von der jeweils gegebenen Fläche w_0 abhängig und in jedem Einzelfall besonders zu berechnen. Da die geschlossene Auflösung der Integrale Z_h der Gleichungen (12) und (15) meist sehr zeitraubend oder mitunter gar nicht durchführbar ist, wendet man am besten stets die *Simpson*sche Regel an. Aus diesem Grunde sind im Tabellenteil unter **Aa** und **Ba** die Funktionen $\Re e\, \Phi_1$, $\Re e\, \Phi_2$ bzw. $\Re e\, \Psi_1$, $\Re e\, \Psi_2$ in Intervallen von 0,05, die Funktionen $\Re e\, \Phi_3$, $\Re e\, \Psi_3$ in Intervallen von 0,025 längs der ξ-Achse zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ tabuliert.

Sind die Konstanten $\Re e\, C_h$ und $\Im m\, C_h$ bzw. $\Re e\, C_h^*$ und $\Im m\, C_h^*$ bekannt, so setzt man sie in (5) oder (14) ein und gewinnt auf diese Weise die gesuchten Biegeflächen $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ für $h = 1$ bis $h = 3$. Die zugehörigen Zahlentafeln sind unter **Ac** und **Bc** zu finden. Die Flächen $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ sind für $0 \leqq \xi \leqq 1$ und $\eta \leqq 0$ in Intervallen von 0,2 nach beiden Achsrichtungen berechnet. Die Intervallteilung der Flächen $w_{1(h)}^a$ ergibt bei ihrer Anwendung auf die in Abb. 4e bis 4h dargestellten Platten ein Maschennetz, das doppelt so weit ist als dasjenige der Platten der Abb. 4a bis 4d. Aus Raummangel konnten die Tafeln für eine engere Teilung hier nicht zum Abdruck kommen, doch wird bei den meisten Aufgaben der Platten der Abb. 4e bis 4h auch die größere Maschenweite ausreichen.

Des weiteren enthalten die Zahlentafeln unter **Ad** und **Bd** Werte für die Verdrehungen der Flächen $w_{1(h)}$ in Richtung der η-Achse, die benötigt werden, wenn die Verdrehungen am gegenüberliegenden Rande r_3 anzugeben sind. Schließlich sind in den Tafeln **Ae** und **Be** die Krümmungen von $w_{1(h)}^s$ und $w_{1(h)}^a$ nach η und in den Tafeln **Af** und **Bf** nach ξ enthalten, mit deren Hilfe die Biegungsmomente der Flächen w_1 berechnet werden können.

Es sind nun noch einige Bemerkungen über die Bestimmung der Flächen w_1' und w_1'' zu machen, worüber schon oben kurz gesprochen wurde. Der unendliche Halbstreifen der Fläche w_1 wird am Rande r_3 durchgeschnitten, es entstehen daher an dieser Stelle freie Randwerte, die durch geeignete Maßnahmen beseitigt werden müssen. Das geschieht durch eine Fläche w_1', die vom Rande r_3 beginnend nach r_1 zu abklingt und bei r_3 die umgekehrten Randwerte von w_1 hat.

Tafel A a. Symmetrie.

$$Z_{hf} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_s \,\mathfrak{Re}\,\Phi_h \,d\xi\,, \qquad Z_{h\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_s \,\mathfrak{Re}\,\Phi_h \,d\xi\,, \qquad Z_{h\psi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_s \,\mathfrak{Re}\,\Phi_h \,d\xi\,.$$

ξ	$\mathfrak{Re}\,\Phi_1$	$\mathfrak{Re}\,\Phi_2$	$\mathfrak{Re}\,\Phi_3$
0	1,650614	2,057848	2,278461
0,025			2,192129
0,05	1,639815	1,946111	1,938792
0,075			1,535040
0,10	1,607704	1,622726	1,007345
0,125			0,390423
0,15	1,555121	1,121842	−0,275088
0,175			−0,945069
0,20	1,483452	0,497052	−1,574865
0,225			−2,136298
0,25	1,413542	−0,189140	−2,549398
0,275			−2,826858
0,30	1,290879	−0,863500	−2,933954
0,325			−2,863187
0,35	1,175082	−1,459256	−2,609374
0,375			−2,192353
0,40	1,050280	−1,919314	−1,633351
0,425			−0,964913
0,45	0,919802	−2,203729	−0,226449
0,475			0,538366
0,50	0,787139	−2,294459	1,284485
0,525			1,968657
0,55	0,655836	−2,197245	2,551824
0,575			3,002869
0,60	0,529391	−1,940726	3,299649
0,625			3,431123
0,65	0,411123	−1,572383	3,397975
0,675			3,212388
0,70	0,304072	−1,151644	2,897191
0,725			2,483859
0,75	0,210860	−0,740983	2,010014
0,775			1,516209
0,80	0,133574	−0,395624	1,042351
0,825			0,624057
0,85	0,073646	−0,153452	0,289071
0,875			0,054271
0,90	0,031733	−0,026188	−0,076746
0,925			−0,115062
0,95	0,007580	+0,006693	−0,086643
0,975			−0,031239
1,00	0	0	0

Tafel Ab. Symmetrie.

I. Einspannung des Randes r_1.

Erste Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	−0,269574	+0,215644
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,588194	+0,164048

Zweite Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\varphi}$	Z_{2f}	$Z_{2\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	−0,341522	+0,229421	−0,283047	+0,024799
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,600108	+0,165184	−0,040241	−0,004027
$\mathfrak{Re}\, C_2$	−0,067188	+0,018486	−0,296860	+0,063074
$\mathfrak{Im}\, C_2$	−0,064528	+0,013387	−0,259818	+0,029559

Dritte Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\varphi}$	Z_{2f}	$Z_{2\varphi}$	Z_{3f}	$Z_{3\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	−0,315971	+0,226601	−0,161336	+0,010498	+0,165547	−0,012802
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,586045	+0,163722	+0,026479	−0,011054	+0,082546	−0,004084
$\mathfrak{Re}\, C_2$	−0,094988	+0,021272	−0,428442	+0,075994	−0,153336	+0,004672
$\mathfrak{Im}\, C_2$	−0,053074	+0,011976	−0,204819	+0,021773	+0,088167	−0,010563
$\mathfrak{Re}\, C_3$	−0,028971	+0,003591	−0,139166	+0,019892	−0,225034	+0,027423
$\mathfrak{Im}\, C_3$	−0,024555	+0,002682	−0,116877	+0,013487	−0,156497	+0,011409

II. Drehbare Auflagerung des Randes r_1.

Erste Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	+0,022352	+0,051193
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,366115	+0,038944

Zweite Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\psi}$	Z_{2f}	$Z_{2\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	−0,041319	+0,054026	−0,289619	+0,000881
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,391096	+0,039746	−0,111200	−0,001432
$\mathfrak{Re}\, C_2$	−0,023083	+0,001991	−0,112546	+0,005838
$\mathfrak{Im}\, C_2$	−0,037844	+0,002065	−0,175123	+0,002706

Dritte Näherung.

	Z_{1f}	$Z_{1\psi}$	Z_{2f}	$Z_{2\psi}$	Z_{3f}	$Z_{3\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C_1$	−0,009566	+0,053721	−0,140673	−0,001061	+0,223200	−0,000767
$\mathfrak{Im}\, C_1$	−0,368772	+0,039542	−0,006364	−0,002642	+0,152440	−0,000122
$\mathfrak{Re}\, C_2$	−0,043606	+0,002170	−0,209003	+0,006844	−0,137067	−0,000174
$\mathfrak{Im}\, C_2$	−0,033118	+0,002002	−0,153137	+0,002170	+0,040365	−0,000779
$\mathfrak{Re}\, C_3$	−0,012214	+0,000151	−0,056943	+0,001219	−0,099485	+0,001563
$\mathfrak{Im}\, C_3$	−0,014497	+0,000146	−0,067928	+0,000986	−0,104787	+0,000619

Tafel A c 1.

$$w^{s}_{(1)} = 2\left[\Re e\, C_1\, \Re e\, \Phi_1(\xi,\eta) + \Im m\, C_1\, \Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)$	
0	+1,65061	−2,05999	+1,48345	−1,89929	+1,05028	−1,45427	+0,52939	−0,84109	+0,13357	−0,26273	0	0	0
−0,2	+0,75417	−1,55948	+0,67077	−1,43220	+0,45886	−1,08409	+0,21546	−0,61556	+0,04637	−0,18762	0	0	−0,2
−0,4	+0,25403	−1,10802	+0,21933	−1,01439	+0,13475	−0,76068	+0,04767	−0,42532	+0,00257	−0,12690	0	0	−0,4
−0,6	+0,00022	−0,74598	−0,00827	−0,68101	−0,02521	−0,50632	−0,03180	−0,27905	−0,01694	−0,08155	0	0	−0,6
−0,8	−0,10911	−0,47723	−0,10502	−0,43442	−0,09028	−0,32019	−0,06121	−0,17385	−0,02278	−0,04968	0	0	−0,8
−1,0	−0,13969	−0,28929	−0,13081	−0,26251	−0,10465	−0,19160	−0,06462	−0,10224	−0,02185	−0,02845	0	0	−1,0
−1,2	−0,13172	−0,16460	−0,12212	−0,14876	−0,09500	−0,10724	−0,05631	−0,05594	−0,01814	−0,01500	0	0	−1,2
−1,4	−0,10837	−0,08600	−0,09991	−0,07728	−0,07648	−0,05468	−0,04421	−0,02754	−0,01380	−0,00700	0	0	−1,4
−1,6	−0,08192	−0,03914	−0,07522	−0,05480	−0,05693	−0,02378	−0,03231	−0,01114	−0,00985	−0,00242	0	0	−1,6
−1,8	−0,05813	−0,01304	−0,05322	−0,01124	−0,03990	−0,00687	−0,02230	−0,00348	−0,00665	−0,00010	0	0	−1,8
−2,0	−0,03910	+0,00017	−0,03569	+0,00060	−0,02653	+0,00145	−0,01462	+0,00174	−0,00127	+0,00091	0	0	−2,0
−2,2	−0,02499	+0,00584	−0,02274	+0,00561	−0,01676	+0,00481	−0,00910	+0,00325	−0,00260	+0,00121	0	0	−2,2
−2,4	−0,01513	+0,00739	−0,01373	+0,00692	−0,01002	+0,00553	−0,00534	+0,00341	−0,00149	+0,00115	0	0	−2,4
−2,6	−0,00859	+0,00694	−0,00777	+0,00644	−0,00560	+0,00501	−0,00292	+0,00296	−0,00078	+0,00095	0	0	−2,6
−2,8	−0,00448	+0,00570	−0,00403	+0,00526	−0,00285	+0,00402	−0,00143	+0,00232	−0,00036	+0,00073	0	0	−2,8
−3,0	−0,00203	+0,00430	−0,00180	+0,00395	−0,00123	+0,00299	−0,00058	+0,00170	−0,00012	+0,00052	0	0	−3,0
−3,2	−0,00067	+0,00305	−0,00058	+0,00279	−0,00035	+0,00209	−0,00012	+0,00117	0	+0,00035	0	0	−3,2
−3,4	+0,00002	+0,00205	+0,00004	+0,00187	+0,00008	+0,00139	+0,00010	+0,00077	+0,00005	+0,00022	0	0	−3,4
−3,6	+0,00031	+0,00131	+0,00030	+0,00119	+0,00026	+0,00088	+0,00017	+0,00048	+0,00006	+0,00014	0	0	−3,6
−3,8	+0,00039	+0,00079	+0,00037	+0,00072	+0,00029	+0,00052	+0,00018	+0,00028	+0,00006	+0,00007	0	0	−3,8
−4,0	+0,00037	+0,00045	+0,00034	+0,00041	+0,00026	+0,00029	+0,00016	+0,00015	+0,00005	+0,00004	0	0	−4,0
−4,2	+0,00030	+0,00023	+0,00028	+0,00021	+0,00021	+0,00015	+0,00012	+0,00007	+0,00004	+0,00002	0	0	−4,2
−4,4	+0,00023	+0,00011	+0,00021	+0,00009	+0,00016	+0,00006	+0,00009	+0,00003	+0,00003	+0,00001	0	0	−4,4
−4,6	+0,00016	+0,00004	+0,00015	+0,00003	+0,00011	+0,00002	+0,00006	+0,00001	+0,00002	0	0	0	−4,6
−4,8	+0,00011	0	+0,00010	0	+0,00007	0	+0,00004	−0,00001	+0,00001	0	0	0	−4,8
−5,0	+0,00007	−0,00001	+0,00007	−0,00001	+0,00005	−0,00001	+0,00003	−0,00001	+0,00001	0	0	0	−5,0
−5,2	+0,00003	−0,00002	+0,00003	−0,00002	+0,00002	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	0	0	0	−5,2
−5,4	+0,00002	−0,00002	+0,00002	−0,00002	+0,00002	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	0	0	0	−5,4
−5,6	+0,00001	−0,00002	+0,00001	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	−5,6
−5,8	+0,00001	−0,00001	0	−0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	−5,8
−6,0	0	−0,00001	0	−0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	−6,0
−6,2	0	−0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,2
−6,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,4

Tafel A c 2.

$$w^{s}_{(2)} = 2\left[\Re e\, C_2\, \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta) + \Im m\, C_2\, \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)$	
0	+2,05785	−5,33471	+0,49705	−2,80399	−1,91931	+2,17526	−1,94073	+4,42435	−0,39562	+2,18062	0	0	0
−0,2	+0,11324	−1,95555	−0,13118	−0,96671	−0,39856	+0,91039	−0,17027	+1,64632	+0,09906	+0,75274	0	0	−0,2
−0,4	−0,16763	−0,64978	−0,14392	−0,30163	−0,03478	+0,33868	+0,11668	+0,55487	+0,11106	+0,23520	0	0	−0,4
−0,6	−0,12266	−0,19444	−0,07850	−0,08334	+0,02408	+0,11412	+0,09611	+0,16881	+0,06083	+0,06511	0	0	−0,6
−0,8	−0,06035	−0,05060	−0,03433	−0,01898	+0,01980	+0,03471	+0,04901	+0,04501	+0,02666	+0,01488	0	0	−0,8
−1,0	−0,02498	−0,01019	−0,01319	−0,00260	+0,01009	+0,00925	+0,02070	+0,00956	+0,01025	+0,00206	0	0	−1,0
−1,2	−0,00922	−0,00071	−0,00457	+0,00053	+0,00426	+0,00196	+0,00775	+0,00095	+0,00356	−0,00040	0	0	−1,2
−1,4	−0,00308	+0,00073	−0,00144	+0,00065	+0,00160	+0,00020	+0,00263	−0,00050	+0,00112	−0,00050	0	0	−1,4
−1,6	−0,00093	+0,00056	−0,00040	+0,00036	+0,00054	−0,00010	+0,00081	−0,00044	+0,00031	−0,00028	0	0	−1,6
−1,8	−0,00024	+0,00028	−0,00009	+0,00016	+0,00017	−0,00009	+0,00022	−0,00023	+0,00007	−0,00012	0	0	−1,8
−2,0	−0,00005	+0,00012	−0,00001	+0,00006	+0,00005	−0,00005	+0,00005	−0,00010	+0,00001	−0,00005	0	0	−2,0
−2,2	0	+0,00004	0	+0,00002	+0,00001	−0,00002	+0,00001	−0,00004	0	−0,00002	0	0	−2,2
−2,4	0	+0,00002	0	+0,00001	0	−0,00001	0	−0,00001	0	−0,00001	0	0	−2,4
−2,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,6

Tafel A c 3.

$$w^{s}_{(3)} = 2\left[\Re e\, C_3\, \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta) + \Im m\, C_3\, \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)$	
0	+2,27846	−8,52264	−1,57487	+0,70541	−1,63335	+8,06061	+3,29965	−1,81533	+1,04235	−5,26941	0	0	0
−0,2	−0,14997	−1,59280	−0,22330	+0,21922	+0,23052	+1,47356	+0,44659	−0,51672	−0,15502	−0,96170	0	0	−0,2
−0,4	−0,12593	−0,26137	−0,02414	+0,05136	+0,13211	+0,23602	+0,04335	−0,11602	−0,08700	−0,12881	0	0	−0,4
−0,6	−0,03789	−0,03650	−0,00087	+0,01026	+0,03735	+0,03180	+0,00006	−0,02246	−0,02449	−0,02066	0	0	−0,6
−0,8	−0,00875	−0,00382	+0,00050	+0,00180	+0,00836	+0,00305	−0,00141	−0,00382	−0,00547	−0,00197	0	0	−0,8
−1,0	−0,00173	−0,00010	+0,00020	+0,00027	+0,00161	−0,00001	−0,00048	−0,00056	−0,00105	+0,00001	0	0	−1,0
−1,2	−0,00030	+0,00009	+0,00005	+0,00003	+0,00027	−0,00010	−0,00012	−0,00007	−0,00018	+0,00007	0	0	−1,2
−1,4	−0,00005	+0,00004	+0,00001	0	+0,00004	−0,00004	−0,00002	0	−0,00003	+0,00002	0	0	−1,4
−1,6	−0,00001	+0,00001	0	0	0	−0,00001	0	0	0	+0,00001	0	0	−1,6
−1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,8

Tafel Ad 1.

$$\frac{\partial w^{*}_{(1)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re\mathrm{e}\, C_1 \frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im\mathrm{m}\, C_1 \frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	+5,79475	−2,48119	+5,26184	−2,33086	+3,84868	−1,88104	+2,06153	−1,17574	+0,57700	−0,40303	0	0	0
−0,2	+3,34341	−2,43585	+3,02453	−2,26163	+2,18644	−1,76693	+1,14653	−1,05402	+0,31007	−0,34232	0	0	−0,2
−0,4	+1,78197	−2,04783	+1,60350	−1,88969	+1,13985	−1,45049	+0,57905	−0,84216	+0,14821	−0,26439	0	0	−0,4
−0,6	+0,83997	−1,57094	+0,74897	−1,44364	+0,51671	−1,09479	+0,24707	−0,62352	+0,05609	−0,19083	0	0	−0,6
−0,8	+0,30724	−1,12792	+0,26767	−1,03316	+0,17019	−0,77599	+0,06673	−0,43504	+0,00793	−0,13028	0	0	−0,8
−1,0	+0,03135	−0,76651	+0,01991	−0,70010	−0,00478	−0,52131	−0,02103	−0,28806	−0,01401	−0,08450	0	0	−1,0
−1,2	−0,09221	−0,49491	−0,08979	−0,45075	−0,07941	−0,33277	−0,05564	−0,18118	−0,02134	−0,05200	0	0	−1,2
−1,4	−0,13147	−0,30308	−0,12346	−0,27519	−0,09953	−0,20124	−0,06213	−0,10775	−0,02127	−0,03014	0	0	−1,4
−1,6	−0,12848	−0,17462	−0,11927	−0,15795	−0,09314	−0,11415	−0,05552	−0,05983	−0,01802	−0,01617	0	0	−1,6
−1,8	−0,10777	−0,09289	−0,09943	−0,08357	−0,07630	−0,05938	−0,04428	−0,03014	−0,01389	−0,00770	0	0	−1,8
−2,0	−0,08254	−0,04363	−0,07585	−0,03890	−0,05750	−0,02681	−0,03274	−0,01279	−0,01002	−0,00289	0	0	−2,0
−2,2	−0,05919	−0,01582	−0,05422	−0,01377	−0,04071	−0,00873	−0,02282	−0,00339	−0,00683	−0,00038	0	0	−2,2
−2,4	−0,04018	−0,00145	−0,03670	−0,00087	−0,02732	+0,00038	−0,01509	+0,00117	−0,00443	+0,00076	0	0	−2,4
−2,6	−0,02591	+0,00495	−0,02360	+0,00482	−0,01742	+0,00424	−0,00948	+0,00296	−0,00272	+0,00113	0	0	−2,6
−2,8	−0,01585	+0,00697	−0,01439	+0,00654	−0,01052	+0,00527	−0,00563	+0,00328	−0,00157	+0,00112	0	0	−2,8
−3,0	−0,00912	+0,00678	−0,00825	+0,00629	−0,00596	+0,00491	−0,00312	+0,00292	−0,00084	+0,00095	0	0	−3,0
−3,2	−0,00484	+0,00567	−0,00436	+0,00523	−0,00309	+0,00401	−0,00157	+0,00233	−0,00040	+0,00073	0	0	−3,2
−3,4	−0,00227	+0,00434	−0,00202	+0,00398	−0,00139	+0,00302	−0,00066	+0,00172	−0,00015	+0,00053	0	0	−3,4
−3,6	−0,00082	+0,00311	−0,00071	+0,00285	−0,00045	+0,00214	−0,00017	+0,00120	−0,00002	+0,00036	0	0	−3,6
−3,8	−0,00007	+0,00210	−0,00004	+0,00192	+0,00003	+0,00143	+0,00007	+0,00079	+0,00004	+0,00023	0	0	−3,8
−4,0	+0,00027	+0,00136	+0,00026	+0,00123	+0,00023	+0,00091	+0,00016	+0,00050	+0,00006	+0,00014	0	0	−4,0
−4,2	+0,00037	+0,00083	+0,00034	+0,00075	+0,00028	+0,00055	+0,00017	+0,00030	+0,00006	+0,00008	0	0	−4,2
−4,4	+0,00036	+0,00048	+0,00033	+0,00043	+0,00026	+0,00031	+0,00016	+0,00016	+0,00005	+0,00004	0	0	−4,4
−4,6	+0,00030	+0,00026	+0,00028	+0,00023	+0,00021	+0,00016	+0,00012	+0,00008	+0,00004	+0,00002	0	0	−4,6
−4,8	+0,00023	+0,00012	+0,00021	+0,00010	+0,00016	+0,00007	+0,00009	+0,00003	+0,00003	+0,00001	0	0	−4,8
−5,0	+0,00017	+0,00005	+0,00015	+0,00005	+0,00012	+0,00003	+0,00006	+0,00001	+0,00002	0	0	0	−5,0
−5,2	+0,00009	0	+0,00008	0	+0,00006	0	+0,00003	0	+0,00001	0	0	0	−5,2
−5,4	+0,00007	−0,00001	+0,00006	−0,00001	+0,00005	−0,00001	+0,00003	−0,00001	+0,00001	0	0	0	−5,4
−5,6	+0,00004	−0,00002	+0,00004	−0,00002	+0,00003	−0,00001	+0,00002	−0,00001	0	0	0	0	−5,6
−5,8	+0,00002	−0,00002	+0,00002	−0,00002	+0,00002	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	0	0	0	−5,8
−6,0	+0,00001	−0,00001	+0,00001	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	0	0	0	0	0	−6,0
−6,2	+0,00001	−0,00001	+0,00001	−0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	−6,2
−6,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,4

Tafel Ad 2.

$$\frac{\partial u^s_{(2)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re e\, C_2 \frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im m\, C_2 \frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	+19,2996	−25,3813	+7,0130	−14,2477	−13,6554	+8,6733	−17,2598	+20,6868	−5,5025	+11,0662	0	0	0
−0,2	+ 3,6407	−10,2987	+0,7973	− 5,3815	− 3,5473	+4,2579	− 3,4664	+ 8,5539	−0,6374	+ 4,1856	0	0	−0,2
−0,4	+ 0,1103	− 3,7405	−0,3029	− 1,8389	− 0,7118	+1,7601	− 0,2360	+ 3,1531	+0,2299	+ 1,4321	0	0	−0,4
−0,6	− 0,3553	− 1,2318	−0,2912	− 0,5682	− 0,0481	+0,6486	+ 0,2529	+ 1,0533	+0,2248	+ 0,4431	0	0	−0,6
−0,8	− 0,2449	− 0,3647	−0,1544	− 0,1549	+ 0,0522	+0,2166	+ 0,1927	+ 0,3172	+0,1197	+ 0,1210	0	0	−0,8
−1,0	− 0,1180	− 0,0934	−0,0666	− 0,0344	+ 0,0397	+0,0652	+ 0,0960	+ 0,0833	+0,0517	+ 0,0270	0	0	−1,0
−1,2	− 0,0483	− 0,0181	−0,0253	− 0,0043	+ 0,0198	+0,0171	+ 0,0401	+ 0,0171	+0,0197	+ 0,0034	0	0	−1,2
−1,4	− 0,0176	− 0,0009	−0,0087	+ 0,0013	+ 0,0082	+0,0035	+ 0,0149	+ 0,0014	+0,0068	− 0,0010	0	0	−1,4
−1,6	− 0,0059	+ 0,0016	−0,0027	+ 0,0013	+ 0,0031	+0,0003	+ 0,0050	− 0,0011	+0,0021	− 0,0010	0	0	−1,6
−1,8	− 0,0017	+ 0,0011	−0,0007	+ 0,0007	+ 0,0010	−0,0002	+ 0,0015	− 0,0009	+0,0006	− 0,0006	0	0	−1,8
−2,0	− 0,0005	+ 0,0006	−0,0002	+ 0,0003	+ 0,0003	−0,0002	+ 0,0004	− 0,0005	+0,0001	− 0,0003	0	0	−2,0
−2,2	− 0,0001	+ 0,0002	0	+ 0,0001	+ 0,0001	−0,0001	+ 0,0001	− 0,0002	0	− 0,0001	0	0	−2,2
−2,4	0	+ 0,0001	0	0	0	0	0	− 0,0001	0	0	0	0	−2,4
−2,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,6

Tafel Ad 3.

$$\frac{\partial u^s_{(3)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re e\, C_3 \frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im m\, C_3 \frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	+34,5828	−68,7096	−14,6966	+3,2257	−28,2554	+65,9108	+31,3913	−9,6382	+18,2543	−43,1326	0	0	0
−0,2	+ 1,5479	−13,8635	− 2,2955	+1,4751	− 0,6485	+12,9886	+ 4,7298	−3,6181	+ 0,3842	− 8,4850	0	0	−0,2
−0,4	− 0,6110	− 2,4549	− 0,2973	+0,3956	+ 0,7087	+ 2,2494	+ 0,5761	−0,9134	− 0,4697	− 1,4670	0	0	−0,4
−0,6	− 0,2587	− 0,3789	− 0,0256	+0,0860	+ 0,2623	+ 0,3378	+ 0,0404	−0,1916	− 0,1724	− 0,2198	0	0	−0,6
−0,8	− 0,0679	− 0,0481	+ 0,0011	+0,0162	+ 0,0659	+ 0,0409	− 0,0052	−0,0351	− 0,0432	− 0,0265	0	0	−0,8
−1,0	− 0,0146	− 0,0039	+ 0,0012	+0,0027	+ 0,0138	+ 0,0028	− 0,0031	−0,0057	− 0,0090	− 0,0018	0	0	−1,0
−1,2	− 0,0027	+ 0,0003	+ 0,0004	+0,0004	+ 0,0025	− 0,0004	− 0,0009	−0,0008	− 0,0017	+ 0,0003	0	0	−1,2
−1,4	− 0,0005	+ 0,0002	+ 0,0001	0	+ 0,0004	− 0,0002	− 0,0002	−0,0001	− 0,0003	+ 0,0002	0	0	−1,4
−1,6	− 0,0001	+ 0,0001	0	0	+ 0,0001	− 0,0001	0	0	0	0	0	0	−1,6
−1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,8

Tafel A e 1.

$$\frac{\partial^2 w^*_{(1)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re\mathrm{e}\, C_1 \frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im\mathrm{m}\, C_1 \frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re\mathrm{e}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im\mathrm{m}\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	+14,9971	+1,2953	+13,7055	+1,0123	+10,2229	+0,3693	+5,6651	−0,1564	+1,6688	−0,1995	0	0	0
−0,2	+ 9,7831	−1,3678	+ 8,9154	−1,3597	+ 6,5935	−1,2610	+3,6010	−0,9297	+1,0383	−0,3721	0	0	−0,2
−0,4	+ 6,0577	−2,3078	+ 5,5039	−2,1755	+ 4,0331	−1,7723	+2,1673	−1,1221	+0,6097	−0,3901	0	0	−0,4
−0,6	+ 3,5303	−2,3589	+ 3,2021	−2,1977	+ 2,3203	−1,7244	+1,2221	−1,0352	+0,3329	−0,3388	0	0	−0,6
−0,8	+ 1,9164	−2,0299	+ 1,7265	−1,8748	+ 1,2317	−1,4429	+0,6301	−0,8412	+0,1633	−0,2655	0	0	−0,8
−1,0	+ 0,9286	−1,5791	+ 0,8298	−1,4521	+ 0,5766	−1,1034	+0,2799	−0,6304	+0,0656	−0,1937	0	0	−1,0
−1,2	+ 0,3628	−1,1461	+ 0,3181	−1,0504	+ 0,2072	−0,7902	+0,0867	−0,4442	+0,0136	−0,1335	0	0	−1,2
−1,4	+ 0,0642	−0,7863	+ 0,0497	−0,7185	+ 0,0168	−0,5359	−0,0096	−0,2969	−0,0109	−0,0874	0	0	−1,4
−1,6	− 0,0741	−0,5124	− 0,0735	−0,4669	− 0,0677	−0,3452	−0,0496	−0,1885	−0,0198	−0,0543	0	0	−1,6
−1,8	− 0,1225	−0,3169	− 0,1154	−0,2879	− 0,0939	−0,2109	−0,0593	−0,1133	−0,0206	−0,0319	0	0	−1,8
−2,0	− 0,1247	−0,1848	− 0,1160	−0,1673	− 0,0909	−0,1212	−0,0546	−0,0638	−0,0178	−0,0174	0	0	−2,0
−2,2	− 0,1069	−0,0999	− 0,0987	−0,0900	− 0,0759	−0,0642	−0,0442	−0,0328	−0,0140	−0,0085	0	0	−2,2
−2,4	− 0,0830	−0,0483	− 0,0763	−0,0431	− 0,0580	−0,0300	−0,0331	−0,0145	−0,0102	−0,0034	0	0	−2,4
−2,6	− 0,0602	−0,0187	− 0,0551	−0,0164	− 0,0415	−0,0107	−0,0233	−0,0044	−0,0070	−0,0007	0	0	−2,6
−2,8	− 0,0412	−0,0032	− 0,0377	−0,0024	− 0,0281	−0,0008	−0,0156	+0,0006	−0,0046	+0,0006	0	0	−2,8
−3,0	− 0,0268	+0,0040	− 0,0245	+0,0040	− 0,0181	+0,0036	−0,0099	+0,0027	−0,0028	+0,0011	0	0	−3,0
−3,2	− 0,0166	+0,0065	− 0,0151	+0,0061	− 0,0110	+0,0050	−0,0059	+0,0031	−0,0017	+0,0011	0	0	−3,2
−3,4	− 0,0097	+0,0066	− 0,0087	+0,0061	− 0,0063	+0,0048	−0,0033	+0,0029	−0,0009	+0,0009	0	0	−3,4
−3,6	− 0,0052	+0,0056	− 0,0047	+0,0052	− 0,0034	+0,0040	−0,0017	+0,0023	−0,0004	+0,0007	0	0	−3,6
−3,8	− 0,0025	+0,0044	− 0,0022	+0,0040	− 0,0016	+0,0030	−0,0008	+0,0017	−0,0002	+0,0005	0	0	−3,8
−4,0	− 0,0010	+0,0032	− 0,0009	+0,0029	− 0,0006	+0,0022	−0,0002	+0,0012	0	+0,0004	0	0	−4,0
−4,2	− 0,0002	+0,0022	− 0,0001	+0,0020	0	+0,0015	0	+0,0008	0	+0,0002	0	0	−4,2
−4,4	+ 0,0002	+0,0014	+ 0,0002	+0,0013	+ 0,0002	+0,0010	+0,0001	+0,0005	+0,0001	+0,0002	0	0	−4,4
−4,6	+ 0,0003	+0,0009	+ 0,0003	+0,0008	+ 0,0003	+0,0006	+0,0002	+0,0003	+0,0001	+0,0001	0	0	−4,6
−4,8	+ 0,0003	+0,0005	+ 0,0003	+0,0005	+ 0,0003	+0,0003	+0,0002	+0,0002	0	0	0	0	−4,8
−5,0	+ 0,0003	+0,0003	+ 0,0003	+0,0002	+ 0,0002	+0,0002	+0,0001	+0,0001	0	0	0	0	−5,0
−5,2	+ 0,0002	+0,0001	+ 0,0002	+0,0001	+ 0,0001	+0,0001	+0,0001	0	0	0	0	0	−5,2
−5,4	+ 0,0002	+0,0001	+ 0,0002	0	+ 0,0001	0	+0,0001	0	0	0	0	0	−5,4
−5,6	+ 0,0001	0	+ 0,0001	0	+ 0,0001	0	0	0	0	0	0	0	−5,6
−5,8	+ 0,0001	0	+ 0,0001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−5,8
−6,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,0

Tafel Ae 2.

$$\frac{\partial^2 w^e_{(2)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re e\, C_2 \frac{\partial^2 \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im m\, C_2 \frac{\partial^2 \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	+142,7548	−106,0041	+59,6697	−65,4336	−86,5995	+25,2691	−124,5451	+84,0244	−46,6426	+50,7358	0	0	0
−0,2	+ 35,4799	− 49,5139	+12,6203	−27,5876	−25,6068	+17,3024	− 31,8389	+40,4389	− 9,9082	+21,4302	0	0	−0,2
−0,4	+ 6,3946	− 19,8639	+ 1,2310	−10,3198	− 6,5434	+ 8,3231	− 6,1561	+16,5225	− 0,9904	+ 8,0274	0	0	−0,4
−0,6	+ 0,0081	− 7,1490	− 0,6780	− 3,4953	− 1,2639	+ 3,3997	− 0,2799	+ 6,0340	+ 0,5167	+ 2,7223	0	0	−0,6
−0,8	− 0,7452	− 2,3330	− 0,5868	− 1,0693	− 0,0567	+ 1,2413	+ 0,5399	+ 1,9977	+ 0,4533	+ 0,8340	0	0	−0,8
−1,0	− 0,4872	− 0,6832	− 0,3033	− 0,2875	+ 0,1114	+ 0,4109	+ 0,3851	+ 0,5952	+ 0,2352	+ 0,2247	0	0	−1,0
−1,2	− 0,2305	− 0,1719	− 0,1291	− 0,0621	+ 0,0793	+ 0,1224	+ 0,1880	+ 0,1539	+ 0,1002	+ 0,0487	0	0	−1,2
−1,4	− 0,0932	− 0,0320	− 0,0486	− 0,0067	+ 0,0387	+ 0,0316	+ 0,0774	+ 0,0306	+ 0,0378	+ 0,0054	0	0	−1,4
−1,6	− 0,0338	− 0,0007	− 0,0166	+ 0,0029	+ 0,0160	+ 0,0063	+ 0,0285	+ 0,0019	+ 0,0129	− 0,0022	0	0	−1,6
−1,8	− 0,0111	+ 0,0033	− 0,0051	+ 0,0027	+ 0,0058	+ 0,0004	+ 0,0095	− 0,0024	+ 0,0040	− 0,0021	0	0	−1,8
−2,0	− 0,0033	+ 0,0023	− 0,0014	+ 0,0014	+ 0,0020	− 0,0005	+ 0,0029	− 0,0018	+ 0,0011	− 0,0011	0	0	−2,0
−2,2	− 0,0008	+ 0,0011	− 0,0003	+ 0,0006	+ 0,0006	− 0,0004	+ 0,0007	− 0,0009	+ 0,0002	− 0,0005	0	0	−2,2
−2,4	− 0,0002	+ 0,0004	0	+ 0,0002	+ 0,0002	− 0,0002	+ 0,0002	− 0,0004	0	− 0,0002	0	0	−2,4
−2,6	0	+ 0,0002	0	+ 0,0001	0	− 0,0001	0	− 0,0001	0	− 0,0001	0	0	−2,6
−2,8	0	+ 0,0001	0	0	0	0	0	− 0,0001	0	0	0	0	−2,8
−3,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−3,0

Tafel Ae 3.

$$\frac{\partial^2 w^e_{(3)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re e\, C_3 \frac{\partial^2 \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im m\, C_3 \frac{\partial^2 \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	+417,2194	−525,1483	−131,1876	+1,4419	−358,2346	+512,4908	+285,0902	−26,5416	+232,4149	−335,7978	0	0	0
−0,2	+ 37,8289	−115,5998	− 22,2154	+8,5170	− 28,5976	+109,7284	+ 46,8013	−22,4888	+ 18,3451	− 71,7513	0	0	−0,2
−0,4	− 0,8568	− 22,0410	− 3,2403	+2,8489	+ 2,0562	+ 20,4606	+ 6,5398	− 6,7748	− 1,4049	− 13,3568	0	0	−0,4
−0,6	− 1,5354	− 3,6937	− 0,3713	+0,6887	+ 1,6397	+ 3,3493	+ 0,6848	− 1,5643	− 1,0811	− 2,1825	0	0	−0,6
−0,8	− 0,4940	− 0,5313	− 0,0197	+0,1405	+ 0,4900	+ 0,4661	+ 0,0178	− 0,3092	− 0,3214	− 0,3030	0	0	−0,8
−1,0	− 0,1175	− 0,0592	+ 0,0055	+0,0251	+ 0,1127	+ 0,0484	− 0,0165	− 0,0537	− 0,0739	− 0,0313	0	0	−1,0
−1,2	− 0,0237	− 0,0027	+ 0,0025	+0,0039	+ 0,0222	+ 0,0011	− 0,0062	− 0,0081	− 0,0145	− 0,0007	0	0	−1,2
−1,4	− 0,0042	+ 0,0011	+ 0,0007	+0,0005	+ 0,0039	− 0,0012	− 0,0016	− 0,0010	− 0,0025	+ 0,0008	0	0	−1,4
−1,6	− 0,0006	+ 0,0004	+ 0,0001	0	+ 0,0005	− 0,0004	− 0,0003	− 0,0001	− 0,0004	+ 0,0003	0	0	−1,6
−1,8	− 0,0001	+ 0,0001	0	0	+ 0,0001	− 0,0001	− 0,0001	0	0	+ 0,0001	0	0	−1,8
−2,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,0

Tafel A f 1.

$$\frac{\partial^2 w^s_{(1)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_1 \frac{\partial^2 \Re e\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_1 \frac{\partial^2 \Im m\, \Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\Phi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	−8,6579	+8,1856	−6,8934	+7,2716	−2,2750	+4,3893	+3,2814	−0,6966	+6,9691	−7,8161	+5,7322	−15,7524	0
−0,2	−4,3395	+6,5042	−3,3446	+5,6611	−0,8124	+3,1409	+1,9970	−0,9262	+3,3133	−6,0205	+1,3598	−10,9161	−0,2
−0,4	−1,8233	+4,7962	−1,3104	+4,1112	−0,0597	+2,1282	+1,1418	−0,8849	+1,2377	−4,3364	−0,7289	− 7,1819	−0,4
−0,6	−0,4639	+3,3350	−0,2361	+2,8217	+0,2735	+1,3701	+0,6008	−0,7333	+0,1566	−2,9552	−1,5181	− 4,4874	−0,6
−0,8	+0,1917	+2,2013	+0,2622	+1,8396	+0,3756	+0,8364	+0,2769	−0,5571	−0,3326	−1,9133	−1,6283	− 2,6482	−0,8
−1,0	+0,4450	+1,3801	+0,4372	+1,1384	+0,3628	+0,4800	+0,0956	−0,3969	−0,4930	−1,1752	−1,4294	− 1,4555	−1,0
−1,2	+0,4868	+0,8176	+0,4464	+0,6642	+0,3024	+0,2540	+0,0030	−0,2679	−0,4875	−0,6796	−1,1276	− 0,7217	−1,2
−1,4	+0,4311	+0,4517	+0,3828	+0,3595	+0,2306	+0,1181	−0,0373	−0,1718	−0,4114	−0,3633	−0,8270	− 0,2965	−1,4
−1,6	+0,3419	+0,2258	+0,2975	+0,1739	+0,1648	+0,0418	−0,0490	−0,1044	−0,3163	−0,1722	−0,5724	− 0,0686	−1,6
−1,8	+0,2518	+0,0944	+0,2158	+0,0677	+0,1116	+0,0026	−0,0467	−0,0596	−0,2276	−0,0638	−0,3762	+ 0,0400	−1,8
−2,0	+0,1749	+0,0235	+0,1479	+0,0117	+0,0717	−0,0147	−0,0386	−0,0313	−0,1549	−0,0075	−0,2348	+ 0,0807	−2,0
−2,2	+0,1153	−0,0106	+0,0964	−0,0142	+0,0437	−0,0199	−0,0293	−0,0144	−0,1002	+0,0179	−0,1384	+ 0,0860	−2,2
−2,4	+0,0722	−0,0237	+0,0596	−0,0232	+0,0251	−0,0191	−0,0208	−0,0049	−0,0615	+0,0261	−0,0759	+ 0,0753	−2,4
−2,6	+0,0427	−0,0257	+0,0347	−0,0236	+0,0132	−0,0159	−0,0140	−0,0001	−0,0355	+0,0257	−0,0375	+ 0,0593	−2,6
−2,8	+0,0236	−0,0227	+0,0188	−0,0202	+0,0061	−0,0122	−0,0090	+0,0020	−0,0189	+0,0217	−0,0153	+ 0,0434	−2,8
−3,0	+0,0118	−0,0180	+0,0090	−0,0156	+0,0022	−0,0087	−0,0055	+0,0026	−0,0089	+0,0166	−0,0035	+ 0,0300	−3,0
−3,2	+0,0049	−0,0132	+0,0035	−0,0113	+0,0001	−0,0059	−0,0031	+0,0025	−0,0033	+0,0119	+0,0022	+ 0,0197	−3,2
−3,4	+0,0012	−0,0092	+0,0006	−0,0078	−0,0008	−0,0038	−0,0016	+0,0020	−0,0004	+0,0082	+0,0043	+ 0,0123	−3,4
−3,6	−0,0006	−0,0061	−0,0008	−0,0051	−0,0011	−0,0023	−0,0008	+0,0015	+0,0010	+0,0053	+0,0046	+ 0,0072	−3,6
−3,8	−0,0013	−0,0038	−0,0012	−0,0031	−0,0010	−0,0013	−0,0002	+0,0011	+0,0014	+0,0032	+0,0040	+ 0,0040	−3,8
−4,0	−0,0014	−0,0022	−0,0012	−0,0018	−0,0008	−0,0007	0	+0,0007	+0,0014	+0,0019	+0,0031	+ 0,0020	−4,0
−4,2	−0,0012	−0,0012	−0,0011	−0,0010	−0,0006	−0,0003	+0,0001	+0,0005	+0,0011	+0,0010	+0,0023	+ 0,0008	−4,2
−4,4	−0,0010	−0,0006	−0,0008	−0,0005	−0,0005	−0,0001	+0,0001	+0,0003	+0,0009	+0,0005	+0,0016	+ 0,0002	−4,4
−4,6	−0,0007	−0,0003	−0,0006	−0,0002	−0,0003	0	+0,0001	+0,0002	+0,0006	+0,0002	+0,0011	− 0,0001	−4,6
−4,8	+0,0005	−0,0001	−0,0004	0	−0,0002	0	+0,0001	+0,0001	+0,0004		+0,0006	− 0,0002	−4,8
−5,0	−0,0003	0	−0,0003	0	−0,0001	+0,0001	+0,0001	0	+0,0003	−0,0001	+0,0004	− 0,0002	−5,0
−5,2	−0,0002	+0,0001	−0,0001	+0,0001	−0,0001	0	0	0	+0,0001	−0,0001	+0,0002	− 0,0002	−5,2
−5,4	−0,0001	+0,0001	−0,0001	+0,0001	0	0	0	0	+0,0001	−0,0001	+0,0001	− 0,0002	−5,4
−5,6	−0,0001	+0,0001	−0,0001	+0,0001	0	0	0	0	+0,0001	0	0	− 0,0001	−5,6
−5,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,0001	−5,8
−6,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	− 0,0001	−6,0
−6,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−6,2

Tafel Af 2.

$$\frac{\partial^2 u^s_{(2)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_2 \frac{\partial^2 \Re e\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_2 \frac{\partial^2 \Im m\, \Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	−90,1903	+139,2467	−24,0037	+67,5348	+70,9887	−76,0633	+39,2236	−133,3325	−42,1620	−0,7198	+17,8819	+143,9345	0
−0,2	−14,8550	+ 54,8594	− 0,7656	+24,5420	+15,2008	−32,2393	− 1,1525	− 47,5985	−13,8293	+4,1758	+20,8904	+ 45,0833	−0,2
−0,4	+ 0,8929	+ 19,4501	+ 2,3176	+ 8,0861	+ 1,5862	−12,1072	− 5,3552	− 15,4069	− 4,0745	+2,8089	+11,5310	+ 12,5216	−0,4
−0,6	+ 2,3259	+ 6,2517	+ 1,6019	+ 2,3954	− 0,7491	− 4,1156	− 3,3587	− 4,4659	− 1,0354	+1,3426	+ 5,0715	+ 2,8786	−0,6
−0,8	+ 1,4128	+ 1,7961	+ 0,7732	+ 0,6139	− 0,6749	− 1,2642	− 1,5629	− 1,1055	− 0,1373	+0,5463	+ 1,9556	+ 0,4085	−0,8
−1,0	+ 0,6488	+ 0,4382	+ 0,3165	+ 0,1194	− 0,3524	− 0,3418	− 0,6255	− 0,1972	− 0,0072	+0,1989	+ 0,6807	− 0,0713	−1,0
−1,2	+ 0,2576	+ 0,0751	+ 0,1158	+ 0,0058	− 0,1508	− 0,0747	− 0,2247	+ 0,0011	+ 0,0185	+0,0656	+ 0,2147	− 0,0945	−1,2
−1,4	+ 0,0919	− 0,0025	+ 0,0384	− 0,0102	− 0,0570	− 0,0086	− 0,0732	+ 0,0239	+ 0,0129	+0,0195	+ 0,0601	− 0,0533	−1,4
−1,6	+ 0,0298	− 0,0104	+ 0,0115	− 0,0074	− 0,0195	+ 0,0032	− 0,0214	+ 0,0155	+ 0,0063	+0,0050	+ 0,0141	− 0,0237	−1,6
−1,8	+ 0,0086	− 0,0065	+ 0,0030	− 0,0036	− 0,0060	+ 0,0030	− 0,0054	+ 0,0073	+ 0,0026	+0,0010	+ 0,0021	− 0,0092	−1,8
−2,0	+ 0,0022	− 0,0031	+ 0,0006	− 0,0015	− 0,0017	+ 0,0017	− 0,0010	+ 0,0030	+ 0,0010	+0,0001	− 0,0003	− 0,0033	−2,0
−2,2	+ 0,0004	− 0,0012	0	− 0,0005	− 0,0004	+ 0,0007	0	+ 0,0011	+ 0,0003	−0,0001	− 0,0004	− 0,0010	−2,2
−2,4	0	− 0,0004	0	− 0,0002	− 0,0001	+ 0,0003	+ 0,0001	+ 0,0004	+ 0,0001	−0,0001	− 0,0002	− 0,0003	−2,4
−2,6	− 0,0001	− 0,0001	0	− 0,0001	0	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001	0	0	− 0,0001	− 0,0001	−2,6
−2,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,8

Tafel Af 3.

$$\frac{\partial^2 u^s_{(3)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_3 \frac{\partial^2 \Re e\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_3 \frac{\partial^2 \Im m\, \Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\,\Phi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	−277,7746	+585,7774	+132,7781	−60,3152	+176,0295	−557,2141	−266,0511	+229,2780	+89,9406	+308,1340	−132,2631	−426,3361	0
−0,2	− 10,2958	+117,1163	+ 18,7736	−18,6277	− 5,2033	−105,8442	− 30,7808	+ 55,7603	+34,7218	+ 46,7220	− 49,3710	− 64,1517	−0,2
−0,4	+ 5,6339	+ 20,5628	+ 2,0176	− 4,3511	− 7,5585	− 17,6689	− 1,7179	+ 11,4219	+ 8,8498	+ 5,7550	− 12,4397	− 7,7949	−0,4
−0,6	+ 2,2545	+ 3,1411	+ 0,0687	− 0,8670	− 2,3993	− 2,5277	+ 0,4281	+ 2,0504	+ 1,8676	+ 0,4205	− 2,6067	− 0,5410	−0,6
−0,8	+ 0,5814	+ 0,3920	− 0,0430	− 0,1518	− 0,5674	− 0,2785	+ 0,2021	+ 0,3217	+ 0,3441	− 0,0463	− 0,4774	+ 0,0724	−0,8
−1,0	+ 0,1236	+ 0,0300	− 0,0169	− 0,0231	− 0,1141	− 0,0116	+ 0,0547	+ 0,0420	+ 0,0556	− 0,0296	− 0,0766	+ 0,0424	−1,0
−1,2	+ 0,0229	− 0,0027	− 0,0043	− 0,0029	− 0,0201	+ 0,0052	+ 0,0119	+ 0,0037	+ 0,0076	− 0,0085	− 0,0104	+ 0,0121	−1,2
−1,4	+ 0,0038	− 0,0019	− 0,0009	− 0,0002	− 0,0031	+ 0,0022	+ 0,0023	− 0,0001	+ 0,0008	− 0,0019	− 0,0010	+ 0,0027	−1,4
−1,6	+ 0,0005	− 0,0005	− 0,0002	0	− 0,0004	+ 0,0005	+ 0,0004	− 0,0002	0	− 0,0004	0	+ 0,0005	−1,6
−1,8	+ 0,0001	− 0,0001	0	0	0	+ 0,0001	+ 0,0001	− 0,0001	0	− 0,0001	0	+ 0,0001	−1,8
−2,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,0

Tafel B a. Antimetrie.

$$Z^{\bullet}_{hf} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_a \,\mathfrak{Re}\,\Psi_h \,d\xi\,, \qquad Z^{\bullet}_{h\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_a \,\mathfrak{Re}\,\Psi_h \,d\xi\,, \qquad Z^{\bullet}_{h\psi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \psi_a \,\mathfrak{Re}\,\Psi_h \,d\xi\,.$$

ξ	$\mathfrak{Re}\,\Psi_1$	$\mathfrak{Re}\,\Psi_2$	$\mathfrak{Re}\,\Psi_3$
0	0	0	0
0,025			−0,800541
0,05	−0,421672	−0,961728	−1,523013
0,075			−2,096286
0,10	−0,822079	−1,753142	−2,462502
0,125			−2,582301
0,15	−1,181172	−2,233354	−2,438405
0,175			−2,037317
0,20	−1,481925	−2,315356	−1,408971
0,225			−0,604275
0,25	−1,710324	−1,980976	0,309129
0,275			1,243558
0,30	−1,857360	−1,283930	2,143543
0,325			2,902054
0,35	−1,919035	−0,340019	3,458610
0,375			3,759855
0,40	−1,896770	0,693793	3,773599
0,425			3,491808
0,45	−1,797316	1,647925	2,931510
0,475			2,133536
0,50	−1,632287	2,371373	1,159058
0,525			0,084140
0,55	−1,417332	2,759864	−1,006881
0,575			−2,029062
0,60	−1,171001	2,775293	−2,904503
0,625			−3,569649
0,65	−0,913350	2,452408	−3,981040
0,675			−4,119370
0,70	−0,664202	1,890598	−3,991171
0,725			−3,627918
0,75	−0,441357	1,231276	−3,082498
0,775			−2,423431
0,80	−0,259325	0,624315	−1,727105
0,825			−1,068772
0,85	−0,126455	0,189557	−0,514006
0,875			−0,108841
0,90	−0,044630	−0,018997	0,129783
0,925			0,199451
0,95	−0,007518	−0,037757	0,152789
0,975			0,055540
1,00	0	0	0

Tafel Bb. Antimetrie.

I. Einspannung des Randes r_1.

Erste Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,313972	+0,104799
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,358745	+0,056996

Zweite Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\varphi}$	Z^*_{2f}	$Z^*_{2\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,426773	+0,119591	−0,213430	+0,011169
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,339456	+0,052612	+0,051648	−0,010545
$\mathfrak{Re}\, C^*_2$	−0,111536	+0,021033	−0,263385	+0,040878
$\mathfrak{Im}\, C^*_2$	−0,098347	+0,014630	−0,200239	+0,017807

Dritte Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\varphi}$	Z^*_{2f}	$Z^*_{2\varphi}$	Z^*_{3f}	$Z^*_{3\varphi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,365116	+0,114063	−0,039227	−0,004932	+0,171664	−0,009583
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,322514	+0,051280	+0,097397	−0,013886	+0,034350	+0,000239
$\mathfrak{Re}\, C^*_2$	−0,159371	+0,024963	−0,394478	+0,051292	−0,108614	+0,001930
$\mathfrak{Im}\, C^*_2$	−0,069309	+0,011729	−0,114835	+0,008504	+0,101196	−0,009073
$\mathfrak{Re}\, C^*_3$	−0,050345	+0,005243	−0,150488	+0,017365	−0,190072	+0,019005
$\mathfrak{Im}\, C^*_3$	−0,042914	+0,003912	−0,121970	+0,011577	−0,123865	+0,007653

II. Drehbare Auflagerung des Randes r_1.

Erste Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,090748	+0,013977
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,237342	+0,007602

Zweite Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\psi}$	Z^*_{2f}	$Z^*_{2\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,177935	+0,015641	−0,195511	−0,000017
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,239881	+0,007326	−0,000059	−0,001155
$\mathfrak{Re}\, C^*_2$	−0,042857	+0,001629	−0,110233	+0,002887
$\mathfrak{Im}\, C^*_2$	−0,057378	+0,001440	−0,134671	+0,001219

Dritte Näherung.

	Z^*_{1f}	$Z^*_{1\psi}$	Z^*_{2f}	$Z^*_{2\psi}$	Z^*_{3f}	$Z^*_{3\psi}$
$\mathfrak{Re}\, C^*_1$	−0,119367	+0,015220	−0,034302	−0,001354	+0,179424	−0,000310
$\mathfrak{Im}\, C^*_1$	−0,216370	+0,007182	+0,064172	−0,001561	+0,065657	+0,000162
$\mathfrak{Re}\, C^*_2$	−0,077003	+0,001847	−0,203672	+0,003519	−0,097443	−0,000141
$\mathfrak{Im}\, C^*_2$	−0,042392	+0,001295	−0,092700	+0,000682	+0,055360	−000,0504
$\mathfrak{Re}\, C^*_3$	−0,022705	+0,000231	−0,063828	+0,000880	−0,087079	+0,000908
$\mathfrak{Im}\, C^*_3$	−0,025437	+0,000201	−0,070367	+0,000676	−0,082568	+0,000343

Tafel Bc 1.

$$w^a_{(1)} = 2\left[\Re e\, C_1^* \,\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta) + \Im m\, C_1^* \,\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)$	
0	0	0	−1,48193	+2,31065	−1,89677	+3,38927	−1,17100	+2,71956	−0,25933	+1,00163	0	0	0
−0,2	0	0	−0,37517	+1,24180	−0,42442	+1,78570	−0,18101	+1,38752	+0,01150	+0,48882	0	0	−0,2
−0,4	0	0	−0,01013	+0,61270	+0,03773	+0,86620	+0,07077	+0,65384	+0,06834	+0,22063	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+0,07453	+0,27977	+0,12901	+0,38880	+0,12849	+0,28465	+0,05956	+0,09145	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+0,07000	+0,11753	+0,10885	+0,16004	+0,09516	+0,11277	+0,03888	+0,03388	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+0,04699	+0,04437	+0,07014	+0,05868	+0,05781	+0,03896	+0,02204	+0,01037	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+0,02709	+0,01410	+0,03946	+0,01761	+0,03131	+0,01024	+0,01136	+0,00187	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+0,01413	+0,00291	+0,02021	+0,00291	+0,01555	+0,00061	+0,00540	−0,00062	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+0,00680	−0,00050	+0,00956	−0,00129	+0,00715	−0,00173	+0,00238	−0,00098	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+0,00302	−0,00111	+0,00418	−0,00182	+0,00302	−0,00171	+0,00095	−0,00075	0	0	−1,8
−2,0	0	0	+0,00123	−0,00090	+0,00167	−0,00137	+0,00116	−0,00117	+0,00034	−0,00047	0	0	−2,0
−2,2	0	0	+0,00061	−0,00078	+0,00080	−0,00115	+0,00052	−0,00094	+0,00013	−0,00035	0	0	−2,2
−2,4	0	0	+0,00013	−0,00032	+0,00016	−0,00046	+0,00008	−0,00036	+0,00001	−0,00013	0	0	−2,4
−2,6	0	0	+0,00002	−0,00016	+0,00001	−0,00023	−0,00001	−0,00017	−0,00001	−0,00006	0	0	−2,6
−2,8	0	0	−0,00001	−0,00007	−0,00002	−0,00010	−0,00003	−0,00008	−0,00001	−0,00003	0	0	−2,8
−3,0	0	0	−0,00002	−0,00003	−0,00002	−0,00004	−0,00002	−0,00003	−0,00001	−0,00001	0	0	−3,0
−3,2	0	0	−0,00001	−0,00001	−0,00002	−0,00002	−0,00001	−0,00001	−0,00001	0	0	0	−3,2
−3,4	0	0	−0,00001	0	−0,00001	−0,00001	−0,00001	0	0	0	0	0	−3,4
−3,6	0	0	0	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	0	−3,6
−3,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−3,8

Tafel Bc 2.

$$w^a_{(2)} = 2\left[\Re e\, C_2^* \,\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta) + \Im m\, C_2^* \,\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)$	$\Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)$	
0	0	0	−2,31536	+6,66955	+0,69379	+3,01355	+2,77529	−4,44588	+0,62432	−3,67535	0	0	0
−0,2	0	0	+0,00191	+1,75849	+0,41012	+0,65197	+0,28849	−1,27314	−0,15432	−0,91565	0	0	−0,2
−0,4	0	0	+0,14454	+0,41346	+0,14989	+0,11975	−0,03647	−0,32310	−0,11133	−0,20273	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+0,06788	+0,08541	+0,04507	+0,01588	−0,03505	−0,07301	−0,04280	−0,03856	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+0,02297	+0,01453	+0,01190	+0,00004	−0,01423	−0,01430	−0,01323	−0,00556	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+0,00659	+0,00153	+0,00280	−0,00096	−0,00452	−0,00220	−0,00356	−0,00023	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+0,00237	−0,00025	+0,00082	−0,00065	−0,00176	−0,00021	−0,00121	+0,00034	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+0,00038	−0,00018	+0,00010	−0,00015	−0,00030	−0,00007	−0,00018	+0,00013	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+0,00008	−0,00007	+0,00001	−0,00005	−0,00007	+0,00004	−0,00003	+0,00005	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+0,00001	−0,00002	0	−0,00001	−0,00001	+0,00002	0	+0,00001	0	0	−1,8
−2,0	0	0	0	−0,00001	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,0
−2,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,2

Tafel Bc 3.

$$w^a_{(3)} = 2\left[\Re e\, C_3^* \,\Re e\, \Psi_3(\xi,\eta) + \Im m\, C_3^* \,\Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0.2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Re e\,\Psi_3(\xi,\eta)$	$\Im m\,\Psi_3(\xi,\eta)$	
0	0	0	−1,40897	+9,24946	+3,77360	−7,07046	−2,90450	−3,14962	−1,72711	+6,67609	0	0	0
−0,2	0	0	+0,27043	+1,20643	+0,12529	−1,05163	−0,50877	−0,24839	+0,10776	+0,90486	0	0	−0,2
−0,4	0	0	+0,09119	+0,13556	−0,03504	−0,13549	−0,07456	−0,00617	+0,05669	+0,10624	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+0,01773	+0,01231	−0,01082	−0,01500	−0,00947	+0,00282	+0,01208	+0,01036	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+0,00278	+0,00067	−0,00205	−0,00133	−0,00103	+0,00080	+0,00199	+0,00070	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+0,00037	−0,00005	−0,00032	−0,00007	−0,00009	+0,00015	+0,00028	−0,00001	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+0,00004	−0,00002	−0,00004	+0,00001	0	+0,00002	+0,00003	−0,00001	0	0	−1,2
−1,4	0	0	0	−0,00001	−0,00001	0	0	0	0	0	0	0	−1,4

Tafel Bd 1.

$$\frac{\partial w^a_{(1)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re e\, C_1^* \,\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im m\, C_1^* \,\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\,\Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	0	0	−8,75422	+6,61078	−11,80258	+10,08003	−8,15468	+8,57411	−2,35876	+3,39596	0	0	0
−0,2	0	0	−3,12487	+4,13507	− 4,06224	+ 6,10547	−2,59883	+4,94994	−0,63343	+1,84803	0	0	−0,2
−0,4	0	0	−0,88616	+2,28290	− 1,05770	+ 3,29947	−0,54184	+2,58530	−0,04921	+0,92171	0	0	−0,4
−0,6	0	0	−0,10791	+1,15199	− 0,05458	+ 1,63616	+0,08763	+1,24496	+0,09667	+0,42526	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+0,09973	+0,53750	+ 0,18650	+ 0,75066	+0,20061	+0,55450	+0,09886	+0,18079	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+0,11474	+0,23140	+ 0,18170	+ 0,31708	+0,16278	+0,22610	+0,06828	+0,06940	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+0,08204	+0,09036	+ 0,12354	+ 0,12065	+0,10319	+0,08175	+0,04000	+0,02273	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+0,04895	+0,03047	+ 0,07171	+ 0,03887	+0,05744	+0,02382	+0,02111	+0,00516	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+0,02619	+0,00752	+ 0,03763	+ 0,00840	+0,02919	+0,00340	+0,01026	−0,00038	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+0,01288	+0,00003	+ 0,01819	− 0,00105	+0,01371	−0,00223	+0,00462	−0,00150	0	0	−1,8
−2,0	0	0	+0,00586	−0,00165	+ 0,00814	− 0,00283	+0,00595	−0,00279	+0,00191	−0,00128	0	0	−2,0
−2,2	0	0	+0,00245	−0,00151	+ 0,00333	− 0,00234	+0,00234	−0,00203	+0,00070	−0,00083	0	0	−2,2
−2,4	0	0	+0,00092	−0,00100	+ 0,00122	− 0,00149	+0,00081	−0,00123	+0,00021	−0,00047	0	0	−2,4
−2,6	0	0	+0,00029	−0,00058	+ 0,00036	− 0,00084	+0,00021	−0,00067	+0,00004	−0,00024	0	0	−2,6
−2,8	0	0	+0,00008	−0,00029	+ 0,00009	− 0,00042	+0,00004	−0,00032	0	−0,00011	0	0	−2,8
−3,0	0	0	−0,00001	−0,00014	− 0,00003	− 0,00020	−0,00004	−0,00015	−0,00002	−0,00005	0	0	−3,0
−3,2	0	0	−0,00002	−0,00006	− 0,00004	− 0,00009	−0,00004	−0,00006	−0,00002	−0,00002	0	0	−3,2
−3,4	0	0	−0,00002	−0,00003	− 0,00003	− 0,00004	−0,00003	−0,00002	−0,00001	−0,00001	0	0	−3,4
−3,6	0	0	−0,00001	−0,00001	− 0,00002	− 0,00001	−0,00001	−0,00001	−0,00001	0	0	0	−3,6
−3,8	0	0	−0,00001	0	− 0,00001	0	−0,00001	0	0	0	0	0	−3,8
−4,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−4,0

Tafel Bd 2.

$$\frac{\partial u^a_{(2)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re e\, C_2^* \frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im m\, C_2^* \frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	0	0	−27,27055	+42,47249	− 0,22917	+22,10696	+26,73999	−26,24709	+10,49925	−24,49719	0	0	0
−0,2	0	0	− 3,29951	+12,13110	+ 1,60023	+ 5,26898	+ 4,38791	− 8,23682	+ 0,66067	− 6,60551	0	0	−0,2
−0,4	0	0	+ 0,31154	+ 3,11580	+ 0,84101	+ 1,08346	+ 0,28810	− 2,30663	− 0,43391	− 1,59553	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+ 0,32859	+ 0,70734	+ 0,28659	+ 0,18593	− 0,12124	− 0,56615	− 0,23280	− 0,33973	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+ 0,13525	+ 0,13945	+ 0,08265	+ 0,02025	− 0,07491	− 0,12323	− 0,08260	− 0,06083	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+ 0,04324	+ 0,02172	+ 0,02110	− 0,00201	− 0,02772	− 0,02285	− 0,02441	− 0,00754	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+ 0,01195	+ 0,00157	+ 0,00480	− 0,00220	− 0,00839	− 0,00310	− 0,00636	+ 0,00023	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+ 0,00294	− 0,00061	+ 0,00095	− 0,00091	− 0,00223	− 0,00004	− 0,00148	+ 0,00058	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+ 0,00064	− 0,00038	+ 0,00015	− 0,00029	− 0,00053	+ 0,00017	− 0,00030	+ 0,00026	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+ 0,00012	− 0,00014	+ 0,00001	− 0,00008	− 0,00011	+ 0,00008	− 0,00005	+ 0,00009	0	0	−1,8
−2,0	0	0	+ 0,00002	− 0,00004	0	− 0,00002	− 0,00002	+ 0,00003	0	+ 0,00002	0	0	−2,0
−2,2	0	0	0	− 0,00001	0	0	0	+ 0,00001	0	+ 0,00001	0	0	−2,2
−2,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,4

Tafel Bd 3.

$$\frac{\partial u^a_{(3)}}{\partial \eta} = 2\left[\Re e\, C_3^* \frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta} + \Im m\, C_3^* \frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	$\frac{\partial \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta}$	
0	0	0	−31,44680	+90,97930	+51,32565	−64,53499	−23,53822	−37,26946	−29,88377	+64,34749	0	0	0
−0,2	0	0	+ 0,49452	+12,71081	+ 3,22215	−10,40896	− 4,68674	− 3,45905	− 0,59117	+ 9,35682	0	0	−0,2
−0,4	0	0	+ 0,67091	+ 1,54126	− 0,10283	− 1,43622	− 0,74305	− 0,20096	+ 0,37627	+ 1,18041	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+ 0,15657	+ 0,15757	− 0,08159	− 0,17189	− 0,10113	+ 0,01092	+ 0,10298	+ 0,12728	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+ 0,02683	+ 0,01188	− 0,01829	− 0,01724	− 0,01193	+ 0,00620	+ 0,01878	+ 0,01073	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+ 0,00391	+ 0,00018	− 0,00311	− 0,00126	− 0,00118	+ 0,00135	+ 0,00285	+ 0,00043	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+ 0,00049	− 0,00017	− 0,00045	− 0,00001	− 0,00008	+ 0,00022	+ 0,00038	− 0,00008	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+ 0,00005	− 0,00004	− 0,00005	+ 0,00002	0	+ 0,00003	+ 0,00004	− 0,00003	0	0	−1,4
−1,6	0	0	0	− 0,00001	− 0,00001	+ 0,00001	0	0	0	− 0,00001	0	0	−1,6
−1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,8

Tafel Be 1.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(1)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re e\, C_1^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im m\, C_1^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	0	0	−41,9697	+12,6639	−58,2001	+21,4497	−42,4401	+20,8541	−13,5438	+ 9,4656	0	0	0
−0,2	0	0	−17,4390	+11,1758	−23,6807	+17,2649	−16,5950	+14,9589	− 4,9329	+ 6,0511	0	0	−0,2
−0,4	0	0	− 6,4824	+ 7,3315	− 8,5327	+10,9050	− 5,6102	+ 8,9418	− 1,4604	+ 3,3872	0	0	−0,4
−0,6	0	0	− 1,9993	+ 4,1692	− 2,4696	+ 6,0581	− 1,3949	+ 4,7885	− 0,2263	+ 1,7280	0	0	−0,6
−0,8	0	0	− 0,3702	+ 2,1531	− 0,3400	+ 3,0723	− 0,0156	+ 2,3564	+ 0,1203	+ 0,8146	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+ 0,1098	+ 1,0263	+ 0,2422	+ 1,4402	+ 0,2973	+ 1,0730	+ 0,1599	+ 0,3547	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+ 0,1825	+ 0,4523	+ 0,2961	+ 0,6233	+ 0,2737	+ 0,4493	+ 0,1185	+ 0,1406	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+ 0,1413	+ 0,1820	+ 0,2150	+ 0,2450	+ 0,1824	+ 0,1688	+ 0,0720	+ 0,0486	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+ 0,0878	+ 0,0645	+ 0,1294	+ 0,0836	+ 0,1047	+ 0,0532	+ 0,0390	+ 0,0128	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+ 0,0482	+ 0,0180	+ 0,0697	+ 0,0213	+ 0,0545	+ 0,0106	+ 0,0194	+ 0,0008	0	0	−1,8
−2,0	0	0	+ 0,0243	+ 0,0019	+ 0,0344	+ 0,0007	+ 0,0262	− 0,0022	+ 0,0089	− 0,0022	0	0	−2,0
−2,2	0	0	+ 0,0113	− 0,0023	+ 0,0157	− 0,0041	+ 0,0116	− 0,0044	+ 0,0038	− 0,0021	0	0	−2,2
−2,4	0	0	+ 0,0048	− 0,0025	+ 0,0066	− 0,0039	+ 0,0047	− 0,0035	+ 0,0014	− 0,0015	0	0	−2,4
−2,6	0	0	+ 0,0019	− 0,0018	+ 0,0025	− 0,0027	+ 0,0017	− 0,0022	+ 0,0005	− 0,0009	0	0	−2,6
−2,8	0	0	+ 0,0007	− 0,0010	+ 0,0009	− 0,0014	+ 0,0006	− 0,0012	+ 0,0001	− 0,0004	0	0	−2,8
−3,0	0	0	+ 0,0002	− 0,0006	+ 0,0002	− 0,0008	+ 0,0001	− 0,0006	0	− 0,0002	0	0	−3,0
−3,2	0	0	0	− 0,0003	0	− 0,0004	− 0,0001	− 0,0003	0	− 0,0001	0	0	−3,2
−3,4	0	0	0	− 0,0001	− 0,0001	− 0,0002	− 0,0001	− 0,0001	0	0	0	0	−3,4
−3,6	0	0	0	− 0,0001	− 0,0001	− 0,0001	0	− 0,0001	0	0	0	0	−3,6
−3,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−3,8

Tafel Be 2.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(2)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re e\, C_2^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im m\, C_2^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	0	0	−260,7181	+249,4746	− 38,6463	+153,2588	+229,8353	−137,5977	+114,0294	−152,6571	0	0	0
−0,2	0	0	− 43,2645	+ 78,7806	+ 2,2902	+ 39,3014	+ 44,3017	− 49,8911	+ 15,6632	− 44,8008	0	0	−0,2
−0,4	0	0	− 3,0572	+ 22,1769	+ 4,0290	+ 8,9397	+ 5,8685	− 15,5481	− 0,3414	− 11,8162	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+ 1,0981	+ 5,4668	+ 1,6802	+ 1,7726	+ 0,1063	− 4,1380	− 1,0485	− 2,7513	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+ 0,7063	+ 1,1959	+ 0,5405	+ 0,2793	− 0,3141	− 0,9820	− 0,4721	− 0,5612	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+ 0,2641	+ 0,2234	+ 0,1500	+ 0,0214	− 0,1544	− 0,2053	− 0,1570	− 0,0933	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+ 0,0804	+ 0,0309	+ 0,0370	− 0,0073	− 0,0531	− 0,0356	− 0,0446	− 0,0091	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+ 0,0215	+ 0,0007	+ 0,0081	− 0,0047	− 0,0154	− 0,0040	− 0,0112	+ 0,0015	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+ 0,0051	− 0,0016	+ 0,0015	− 0,0018	− 0,0040	+ 0,0003	− 0,0025	+ 0,0013	0	0	−1,6
−1,8	0	0	+ 0,0011	− 0,0008	+ 0,0002	− 0,0005	− 0,0009	+ 0,0004	− 0,0005	+ 0,0005	0	0	−1,8
−2,0	0	0	+ 0,0002	− 0,0003	0	− 0,0001	− 0,0002	+ 0,0002	− 0,0001	+ 0,0002	0	0	−2,0
−2,2	0	0	0	− 0,0001	0	0	0	+ 0,0001	0	0	0	0	−2,2
−2,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,4

Tafel Be 3.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(3)}}{\partial \eta^2} = 2\left[\Re e\, C_3^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + \Im m\, C_3^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}$	
0	0	0	−487,2928	+862,2029	+639,3083	−557,6635	−168,9284	−420,8824	−421,9839	+595,6134	0	0	0
−0,2	0	0	− 18,6174	+129,5430	+ 51,9496	− 99,3429	− 40,9981	− 43,7128	− 29,3707	+ 93,5855	0	0	−0,2
−0,4	0	0	+ 3,9248	+ 16,8432	+ 1,6285	− 14,7245	− 7,1457	− 3,4144	+ 1,6139	+ 12,6441	0	0	−0,4
−0,6	0	0	+ 1,2915	+ 1,8854	− 0,5061	− 1,8911	− 1,0436	− 0,0775	+ 0,8055	+ 1,4793	0	0	−0,6
−0,8	0	0	+ 0,2495	+ 0,1701	− 0,1531	− 0,2085	− 0,1322	+ 0,0405	+ 0,1701	+ 0,1434	0	0	−0,8
−1,0	0	0	+ 0,0392	+ 0,0091	− 0,0291	− 0,0185	− 0,0145	+ 0,0114	+ 0,0281	+ 0,0096	0	0	−1,0
−1,2	0	0	+ 0,0053	− 0,0007	− 0,0045	− 0,0009	− 0,0013	+ 0,0021	+ 0,0040	− 0,0002	0	0	−1,2
−1,4	0	0	+ 0,0006	− 0,0003	− 0,0006	+ 0,0001	− 0,0001	+ 0,0003	+ 0,0005	− 0,0002	0	0	−1,4
−1,6	0	0	+ 0,0001	− 0,0001	− 0,0001	0	0	0	0	0	0	0	−1,6
−1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,8

Tafel Bf 1.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(1)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_1^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_1^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_1(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	0	0	+29,0493	−32,3377	+31,0399	−46,4188	+ 4,5297	−28,7567	−19,9459	+17,9794	− 2,5097	+62,4225	0
−0,2	0	0	+ 9,0260	−18,4486	+ 8,1122	−25,1053	− 1,6552	−13,6544	− 6,7431	+10,7473	+ 6,9211	+28,6940	−0,2
−0,4	0	0	+ 1,7195	− 9,5503	+ 0,4445	−12,4576	− 2,5157	− 5,9919	− 1,6766	+ 5,7553	+ 6,8514	+12,1471	−0,4
−0,6	0	0	− 0,4519	− 4,5625	− 1,4069	− 5,7192	− 1,9172	− 2,3983	− 0,0187	+ 2,8322	+ 4,6826	+ 4,6358	−0,6
−0,8	0	0	− 0,7946	− 2,0152	− 1,3780	− 2,4176	− 1,1811	− 0,8424	+ 0,3573	+ 1,2896	+ 2,7269	+ 1,5022	−0,8
−1,0	0	0	− 0,6214	− 0,8133	− 0,9385	− 0,9208	− 0,6456	− 0,2303	+ 0,3289	+ 0,5400	+ 1,4333	+ 0,3305	−1,0
−1,2	0	0	− 0,3875	− 0,2894	− 0,5455	− 0,2973	− 0,3232	− 0,0213	+ 0,2192	+ 0,2030	+ 0,6942	− 0,0349	−1,2
−1,4	0	0	− 0,2134	− 0,0815	− 0,2863	− 0,0647	− 0,1496	+ 0,0321	+ 0,1258	+ 0,0639	+ 0,3109	− 0,1055	−1,4
−1,6	0	0	− 0,1076	− 0,0094	− 0,1385	+ 0,0076	− 0,0639	+ 0,0339	+ 0,0655	+ 0,0128	+ 0,1277	− 0,0882	−1,6
−1,8	0	0	− 0,0501	+ 0,0096	− 0,0620	+ 0,0214	− 0,0247	+ 0,0237	+ 0,0314	− 0,0027	+ 0,0467	− 0,0566	−1,8
−2,0	0	0	− 0,0216	+ 0,0109	− 0,0254	+ 0,0177	− 0,0082	+ 0,0140	+ 0,0139	− 0,0053	+ 0,0139	− 0,0318	−2,0
−2,2	0	0	− 0,0084	+ 0,0077	− 0,0093	+ 0,0113	− 0,0019	+ 0,0074	+ 0,0057	− 0,0042	+ 0,0022	− 0,0162	−2,2
−2,4	0	0	− 0,0028	+ 0,0046	− 0,0028	+ 0,0064	+ 0,0001	+ 0,0036	+ 0,0020	− 0,0026	− 0,0011	− 0,0077	−2,4
−2,6	0	0	− 0,0007	+ 0,0025	− 0,0004	+ 0,0033	+ 0,0005	+ 0,0016	+ 0,0006	− 0,0015	− 0,0015	− 0,0034	−2,6
−2,8	0	0	− 0,0001	+ 0,0012	+ 0,0001	+ 0,0015	+ 0,0004	+ 0,0007	+ 0,0001	− 0,0007	− 0,0010	− 0,0014	−2,8
−3,0	0	0	+ 0,0002	+ 0,0006	+ 0,0003	+ 0,0007	+ 0,0003	+ 0,0003	− 0,0001	− 0,0004	− 0,0007	− 0,0005	−3,0
−3,2	0	0	+ 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0002	+ 0,0001	− 0,0001	− 0,0002	− 0,0004	− 0,0001	−3,2
−3,4	0	0	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001	0	− 0,0001	− 0,0001	− 0,0002	0	−3,4
−3,6	0	0	+ 0,0001	0	+ 0,0001	0	0	0	0	0	− 0,0001	0	−3,6
−3,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−3,8

Tafel Bf 2.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(2)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_2^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_2^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_2(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	0	0	+169,0007	−303,4981	− 32,5095	−112,1613	−137,5445	+255,0514	+ 71,1208	+ 94,1613	− 61,2204	−264,0845	0
−0,2	0	0	+ 17,4322	− 84,7497	− 16,1182	− 24,2122	− 13,5855	+ 70,8861	+ 23,9436	+ 17,0461	− 34,3101	− 58,1548	−0,2
−0,4	0	0	− 3,4837	− 21,2676	− 5,9038	− 4,1991	+ 3,1453	+ 17,7001	+ 7,0868	+ 1,8357	− 13,1556	− 10,4774	−0,4
−0,6	0	0	− 2,5621	− 4,7169	− 1,7327	− 0,5039	+ 2,1902	+ 3,9055	+ 1,8173	− 0,1489	− 3,9529	− 1,3864	−0,6
−0,8	0	0	− 0,9892	− 0,8995	− 0,4488	+ 0,0235	+ 0,8352	+ 0,7392	+ 0,4153	− 0,1839	− 1,0434	− 0,0022	−0,8
−1,0	0	0	− 0,3064	− 0,1305	− 0,1037	+ 0,0423	+ 0,2570	+ 0,1054	+ 0,0826	− 0,0773	− 0,2456	+ 0,0850	−1,0
−1,2	0	0	− 0,0828	− 0,0056	− 0,0209	+ 0,0184	+ 0,0691	+ 0,0037	+ 0,0131	− 0,0249	− 0,0508	+ 0,0401	−1,2
−1,4	0	0	− 0,0199	+ 0,0055	− 0,0034	+ 0,0061	+ 0,0166	− 0,0048	+ 0,0010	− 0,0069	− 0,0087	+ 0,0136	−1,4
−1,6	0	0	− 0,0043	+ 0,0029	− 0,0003	+ 0,0017	+ 0,0035	− 0,0025	− 0,0003	− 0,0017	− 0,0009	+ 0,0039	−1,6
−1,8	0	0	− 0,0008	+ 0,0010	+ 0,0001	+ 0,0004	+ 0,0006	− 0,0009	− 0,0002	− 0,0004	+ 0,0001	+ 0,0010	−1,8
−2,0	0	0	− 0,0001	+ 0,0003	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001	− 0,0003	− 0,0001	− 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0002	−2,0
−2,2	0	0	0	+ 0,0001	0	0	0	− 0,0001	0	0	0	0	−2,2
−2,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2,4

Tafel Bf 3.

$$\frac{\partial^2 w^a_{(3)}}{\partial \xi^2} = 2\left[\Re e\, C_3^* \frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \Im m\, C_3^* \frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}\right].$$

η	$\xi = 0$		$\xi = 0{,}2$		$\xi = 0{,}4$		$\xi = 0{,}6$		$\xi = 0{,}8$		$\xi = 1{,}0$		η
	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Re e\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	$\frac{\partial^2 \Im m\, \Psi_3(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}$	
0	0	0	+284,4123	−901,6205	−476,2471	+733,3225	+339,2116	+184,2683	− 62,3730	−666,1092	+235,1502	+633,8629	0
−0,2	0	0	− 8,2535	−124,6594	− 23,4428	+113,1448	+ 50,6081	+ 6,4080	− 39,6478	− 79,0196	+ 59,3729	+ 66,7573	−0,2
−0,4	0	0	− 6,9989	− 14,9523	+ 2,5437	+ 15,0558	+ 6,5385	− 1,6398	− 8,6739	− 7,8263	+ 10,5140	+ 5,3699	−0,4
−0,6	0	0	− 1,5793	− 1,5051	+ 1,0357	+ 1,7316	+ 0,7263	− 0,7000	− 1,4435	− 0,5473	+ 1,5522	+ 0,1566	−0,6
−0,8	0	0	− 0,2666	− 0,1095	+ 0,2106	+ 0,1635	+ 0,0647	− 0,0983	− 0,2040	+ 0,0019	+ 0,1936	− 0,0552	−0,8
−1,0	0	0	− 0,0384	− 0,0007	+ 0,0341	+ 0,0101	+ 0,0033	− 0,0153	− 0,0253	+ 0,0101	+ 0,0220	− 0,0165	−1,0
−1,2	0	0	− 0,0048	+ 0,0018	+ 0,0047	− 0,0004	− 0,0003	− 0,0021	− 0,0027	+ 0,0025	+ 0,0020	− 0,0031	−1,2
−1,4	0	0	− 0,0005	+ 0,0004	+ 0,0006	− 0,0003	− 0,0001	− 0,0002	− 0,0002	+ 0,0004	+ 0,0001	− 0,0005	−1,4
−1,6	0	0	0	+ 0,0001	+ 0,0001	− 0,0001	0	0	0	+ 0,0001	0	− 0,0001	−1,6
−1,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1,8

Besonders einfach gestaltet sich die Ermittlung von w_1', wenn r_3 drehbar aufgelagert werden soll. Die betrachtete Platte habe das Seitenverhältnis $a/b = 2\alpha/2$. Bei $\eta = -2\alpha$ hat w_1 bestimmte Durchbiegungen w_{13} und Krümmungen $(\partial^2 w_1/\partial\eta^2)_3$, siehe Abb. 6. Der durch den Schnitt bei r_3 abgelöste Teil von w_1 wird um 180° um eine Achse gedreht, die senkrecht zur (ξ, η)-Ebene im Punkt $\xi = 0$, $\eta = -2\alpha$ steht und, wie in Abb. 6 durch die ausgezogene Linie dargestellt ist, als w_1' an w_1 angesetzt. Auf diese Weise wird bei r_3 die Durchbiegung zu Null, was ohne weiteres zu erkennen ist. Aber auch die Krümmung verschwindet, weil sie bei der Drehung der abgeschnittenen Fläche um 180° ihr Vorzeichen nicht ändert und das Ansetzen von w_1' an w_1 einer Subtraktion gleichkommt. Der in Abb. 6 schraffierte Bereich gibt einen Schnitt längs der η-Achse durch die gesuchte Fläche w_1.

Die am Rande r_1 frei werdenden Randwerte von w_1' sind meist bedeutungslos und brauchen in der Regel nicht mehr beseitigt zu werden; andernfalls ist bei einem drehbar gelagerten Rande r_1 entsprechend wie bei r_3 zu verfahren.

Ist dagegen der Rand r_3 einzuspannen, so sind für die dort durch den Schnitt frei gewordenen Durchbiegungen und Verdrehungen neue Konstante $\Re\mathfrak{e}\, C_k'$ und $\Im\mathfrak{m}\, C_k'$ zu bestimmen. Die Durchbiegungen w_{13} sind dabei der neuen Rechnung unverändert zugrunde zu legen, hingegen müssen die Verdrehungen mit umgekehrten Vorzeichen, als sie sich aus w_1 ergeben, versehen werden, weil für den Rand r_3 nunmehr das Koordinatensystem (ξ', η', w) gilt. Aus Abb. 6 ist dies ohne weiteres zu ersehen. Die folgenden Beispiele geben einen Einblick in die Handhabung der beschriebenen Methoden und der Zahlentafeln[1].

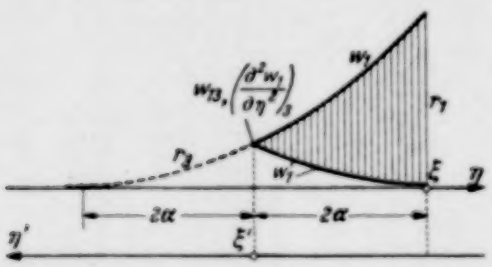

Abb. 6. Ermittlung der Fläche w'_1 bei drehbarem Rand r_3.

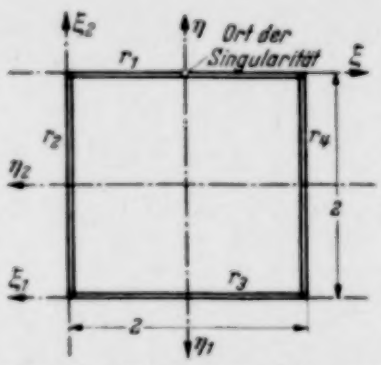

Abb. 7. Lage der Koordinatensysteme beim ersten Beispiel.

6. Beispiele. Zur Vereinfachung wird in den Beispielen die Querdehnungszahl $\nu = 0$ gesetzt, ohne daß dadurch der Rechnungsgang im Prinzip beeinflußt wird.

1) Im ersten Beispiel soll das Einflußfeld eines Stützmomentes in der Mitte eines Randes einer allseits eingespannten quadratischen Platte ermittelt werden. Nach *Pucher* ist die Singularität für das Biegungsmoment am eingespannten Rand

$$w_p = -\frac{1}{\pi N}\,\frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\,.$$

Sie verläuft symmetrisch zur η-Achse (Abb. 7). Aus der Forderung, daß gemäß der endgültigen Lagerung der Platte an den vier Ecken mit den Koordinaten $(\pm 1, 0)$ und $(\pm 1, -2)$ die Durchbiegungen und Verdrehungen der Fläche w_p nach beiden Achsrichtungen verschwinden müssen, bestimmt man nach (2) die Fläche w_e und erhält nach einfacher Rechnung

$$-\pi N w_0 = -\pi N(w_p + w_e) = \frac{\eta^2}{\xi^2+\eta^2} + \frac{2}{25}\,\eta - \frac{13}{25}\,\eta^2 - \frac{2}{25}\,\xi^2\,\eta - \frac{4}{25}\,\eta^3\,. \tag{16}$$

a) Rand r_3. Zunächst wird der Rand r_3 mit Hilfe der Fläche w_3 eingespannt. Zur Berechnung von w_3 ermittelt man daher für $\eta = -2$ die Durchbiegungen und Verdrehungen in der η-Richtung der Fläche (16), also die Funktionen f_{s3} und q_{s3}, und bezieht sie auf das Koordinatensystem

[1] Im Heft 6 der Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaus, herausgegeben vom Deutschen Stahlbau-Verband Berlin, Berlin 1943, S. 189 bis 199 hat *G. Worch* in seinem „Beitrag zur Berechnung der allseitig eingespannten Platte" das vom Verfasser entwickelte Verfahren, wie es in dem in Fußnote 3 von Seite 106 angeführten Buch enthalten ist, mit geringen Abänderungen übernommen und zur Berechnung zweier einfacher Belastungsfälle der quadratischen Platte benutzt. Da die Entwicklungen von *Worch* das Seitenverhältnis enthalten, besitzen sie nicht den Vorteil der besonders in der vorliegenden Arbeit dargelegten Tabulierungsmöglichkeit.

(ξ_1, η_1), was zur Folge hat, daß sich die Vorzeichen von φ_{s3} umkehren:

$$-\pi N f_{s3} = -\pi N w_{0\eta=-2} = \frac{4}{4+\xi_1^2} - 0{,}96 + 0{,}16\,\xi_1^2,$$

$$-\pi N \varphi_{s3} = -\pi N \left(\frac{\partial w_0}{\partial \eta}\right)_{\eta=-2} = \frac{4\,\xi_1^2}{(4+\xi_1^2)^2} - 0{,}24 + 0{,}08\,\xi_1^2.$$

Da diese beiden Ausdrücke symmetrisch zur η_1-Achse verlaufen, sind die Tafeln des Symmetriefalles maßgebend.

Es werden nun f_{s3} und φ_{s3} im Intervall $0 \leqq \xi_1 \leqq 1$ in den Punkten 0, 0,1, 0,2 ... 1 und mit der *Simpson*schen Regel die Integrale $Z_{hf} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_{s3}\,\mathfrak{Re}\,\Phi_h\,d\xi_1$ und $Z_{h\varphi} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi_{s3}\,\mathfrak{Re}\,\Phi_h\,d\xi_1$ berechnet (s. Tafel **Aa**). Dabei wird einmal $h=1$, das andere Mal $h=2$ gesetzt, also mit der zweiten Näherung gearbeitet. Man erhält $Z_{1f} = -0{,}024843$, $Z_{1\varphi} = 0{,}163107$, $Z_{2f} = 0{,}004756$, $Z_{2\varphi} = -0{,}059226$. Diese Werte werden in die Gleichungen für die Konstanten $\mathfrak{Re}\,C_1$, $\mathfrak{Im}\,C_1$, $\mathfrak{Re}\,C_2$, $\mathfrak{Im}\,C_2$ auf Tafel **Ab** unter I, zweite Näherung eingesetzt und ergeben $\mathfrak{Re}\,C_1 = 0{,}043089$, $\mathfrak{Im}\,C_1 = 0{,}041898$, $\mathfrak{Re}\,C_2 = -0{,}000463$, $\mathfrak{Im}\,C_2 = 0{,}000800$. Mit diesen Größen geht man in die Tafeln **Ac 1** und **Ac 2** und gewinnt die Durchbiegungen der Fläche w_3^s. Die Tafeln **Ad 1** und **Ad 2** liefern die zugehörigen Verdrehungen, die aber nur längs der Ränder r_3 und r_1 von Interesse sind.

Es ist wichtig, die Genauigkeit der eben aufgestellten Rechnung zu überprüfen und festzustellen, wie weit die Randwerte f_{s3} und φ_{s3} der singulären Fläche längs r_3 durch das Hinzufügen von w_3^s zum Verschwinden gebracht werden. Die folgende Zahlentafel 1 enthält in der zweiten

Zahlentafel 1

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$-\pi N f_{s3}$	+0,04000	+0,03650	+0,02714	+0,01503	+0,00447	0
w_{33}^s	−0,04081	−0,03626	−0,02609	−0,01598	−0,00665	0
$-\pi N \varphi_{s3}$	−0,24000	−0,22699	−0,19022	−0,13545	−0,06989	0
$(\partial \omega_3/\partial \eta_1)_3$	+0,23298	+0,22885	+0,20057	+0,12822	+0,03875	0

und vierten Zeile die gegebenen Größen $-\pi N f_{s3}$ bzw. $-\pi N \varphi_{s3}$, in der dritten und fünften Zeile stehen die von w_3^s herrührenden Randwerte w_{33}^s und $(\partial w_3^s/\partial \eta_1)_3$. Entsprechend (6) müssen die Gleichungen

$$-\pi N f_{s3} + w_{33}^s = 0, \qquad -\pi N \varphi_{s3} + \left(\frac{\partial w_3^s}{\partial \eta_1}\right)_3 = 0$$

möglichst gut erfüllt sein. Man sieht, daß dies besonders in der Umgebung der Symmetrieachse ($\xi_1 = 0$) der Fall ist. Nach den Ecken ($\xi_1 = 0{,}8$) werden die Abweichungen allerdings verhältnismäßig größer. Dies ist aber bedeutungslos, denn gegenüber der größten Ordinate der endgültigen Einflußfläche, die 1 ist, beträgt bei $\xi = 0$ der Fehler nur 0,00218, liegt also bei $2\,{}^0/_{00}$. Nur wenig schlechter sind die Verhältnisse bei den Fehlern der Randverdrehung.

Die Fläche w_3^s verläuft in der η-Richtung nach einer gedämpften Schwingung. Am Rande r_1 werden daher weder w_{31}^s noch $(\partial w_3/\partial \eta_1)_1$ zu Null, genügen also nicht den Bedingungen der Einspannung. Da für w_3^s das Koordinatensystem $\xi_1 \eta_1$ maßgebend ist, erhält man die Größtwerte von w_{31}^s und $(\partial w_3^s/\partial \eta_1)_1$, wenn man unter Berücksichtigung der oben ermittelten Konstanten w_3^s und $(\partial w_3^s/\partial \eta_1)$ für $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = -2$ mit Hilfe der Tafeln **Ac 1** und **Ac 2** bzw. **Ad 1** und **Ad 2** berechnet. Führt man darauf wieder das Koordinatensystem (ξ, η) ein, so ist das Vorzeichen von $(\partial w_3^s/\partial \eta_1)_1$ umzukehren. Es ergibt sich dann

$$w_{31}^s = -0{,}00335, \qquad \left(\frac{\partial w_3^s}{\partial \eta}\right)_1 = 0{,}01077.$$

Diese Größen sind sehr klein und könnten ohne Schaden für die Genauigkeit der gesuchten Einflußfläche vernachlässigt werden. Zur Erläuterung der am Ende des Abschnittes **5** erwähnten Berechnung der Fläche w' soll aber auch diese von w_3^s herrührende Randstörung beseitigt werden.

Die Tafeln **Ac 1** und **Ac 2** bzw. **Ad 1** und **Ad 2** liefern für $\eta_1 = -2$ die maßgebenden Randwerte von w_3^s längs r_1 zwischen $0 \leqq \xi_1 \leqq 1$ nur in den Punkten $\xi = 0; 0{,}2; 0{,}4; \ldots 1$. Um auch die Werte in den Zwischenpunkten $\xi = 0{,}1; 0{,}3; \ldots 0{,}9$ zu erhalten, interpoliert man am besten graphisch,

was völlig ausreichend ist. Da die Randwerte w_{31}^{s} und $(\partial w_3^{s}/\partial\eta)_1$ klein sind, kann man sich bei der Ermittlung der Fläche $w_3^{s'}$ mit der ersten Näherung begnügen. Man berechnet also ebenso wie oben die Werte

$$Z_{1f} = 0{,}002033, \qquad Z_{1\varphi} = -0{,}006638$$

mit Hilfe der Tafel **Aa** und darauf die Konstanten

$$\mathfrak{Re}\, C_1 = -0{,}001979, \qquad \mathfrak{Im}\, C_1 = -0{,}002284$$

mittels der Tafel **Ab I**, erste Näherung. Bei $\xi = 0$ erhält man dann $w_{31}^{s'} = 0{,}00288$ gegenüber $w_{31}^{s} = -0{,}00335$ und $(\partial w_3^{s'}/\partial\eta)_1 = -0{,}01160$ gegenüber $(\partial w_3^{s}/\partial\eta)_1 = 0{,}01077$. Die Abweichungen sind also in Anbetracht der Kleinheit der gegebenen Werte ohne Bedeutung.

b) Rand r_1. Wir wenden uns nun den Randwerten längs r_1 zu, die durch w_0 erzeugt werden. Dort ist $w_{01} = 0$, während gewisse Verdrehungen $(\partial w_0/\partial\eta)_1$ vorhanden sind. Diese werden wiederum zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ in Abständen von 0,1 aus

$$-\pi N \left(\frac{\partial w_0}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = -\pi N \varphi_{s1} = -0{,}08\,(1-\xi^2)\,\pi N$$

berechnet. Mit Hilfe der Tafel **Aa** erhält man

$$Z_{1f} = Z_{2f} = 0, \qquad Z_{1\varphi} = -0{,}056288, \qquad Z_{2\varphi} = 0{,}023869$$

und weiter mit Tafel **Ab**

$$\mathfrak{Re}\, C_1 = -0{,}012322, \quad \mathfrak{Im}\, C_1 = -0{,}009394, \quad \mathfrak{Re}\, C_2 = 0{,}000465, \quad \mathfrak{Im}\, C_2 = -0{,}000048.$$

Die Zahlentafel 2 gibt eine Übersicht über die Fehler. Das Eingehen auf die Restwerte dieser Fläche w_1 am Rande r_3 erübrigt sich, da sie unbedeutend sind.

Zahlentafel 2

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$-\pi N f_{s1}$	0	0	0	0	0	0
w_{11}	+0,00045	−0,00014	−0,00055	+0,00053	+0,00107	0
$-\pi N \varphi_{s1}$	−0,08000	−0,07680	−0,06720	−0,05120	−0,02880	0
$(\partial w_1^{s}/\partial\eta)_1$	+0,07580	+0,07799	+0,07304	+0,04675	+0,01283	0

c) Ränder r_2 und r_4. Es bleibt nun noch die Aufgabe, die Ränder r_2 und r_4 einzuspannen. Wegen der Symmetrie der Fläche w_0 zur Achse η werden beide gleich behandelt. Man ermittelt als erstes die Durchbiegungen und Verdrehungen in der ξ-Richtung der Fläche w_0 am Rande r_2 ($\xi = -1$) aus (16). Es ergibt sich

$$-\pi N f_2 = -\pi N w_{0\xi=-1} = 1 - \frac{1}{1+\eta^2} - 0{,}52\,\eta^2 - 0{,}16\,\eta^3,$$

$$-\pi N \varphi_2 = -\pi N \left(\frac{\partial w_0}{\partial \xi}\right)_{\xi=-1} = \frac{2\,\eta^2}{(\eta^2+1)^2} + 0{,}16\,\eta.$$

Beide Funktionen werden im Intervall $0 \leqq \eta \leqq -2$ zahlenmäßig in Abständen von 0,1 berechnet. Unter Zugrundelegung des Koordinatensystems (ξ_2, η_2) zerlegt man dann die unsymmetrischen Funktionen f_2 und φ_2 in die Symmetrieteile f_{s2} und φ_{s2} und die Antimetrieteile f_{a2} und φ_{a2}. Es ist wieder zu beachten, daß im System (ξ_2, η_2) die Vorzeichen der Verdrehungen φ_{s2} und φ_{a2} gegenüber φ_2 umzukehren sind. Die Berechnung der Integrale erfolgt für den Symmetrieteil nach Tafel **Aa**:

$$Z_{1f} = -0{,}087797, \qquad Z_{1\varphi} = 0{,}223836, \qquad Z_{2f} = 0{,}017938, \qquad Z_{2\varphi} = -0{,}064488.$$

Die zugehörigen Konstanten sind nach Tafel **Ab**

$$\mathfrak{Re}\, C_1 = 0{,}074661, \quad \mathfrak{Im}\, C_1 = 0{,}089200, \quad \mathfrak{Re}\, C_2 = 0{,}000644, \quad \mathfrak{Im}\, C_2 = 0{,}002095.$$

Die entsprechenden Werte des Antimetrieteils erhält man nach Tafel **Ba** und **Bb**:

$$Z_{1f}^{*} = 0{,}011603, \quad Z_{1\varphi}^{*} = -0{,}023834, \quad Z_{2f}^{*} = -0{,}003544, \quad Z_{2\varphi}^{*} = -0{,}002850.$$
$$\mathfrak{Re}\, C_1^{*} = -0{,}007078, \quad \mathfrak{Im}\, C_1^{*} = -0{,}005346, \quad \mathfrak{Re}\, C_2^{*} = -0{,}000979, \quad \mathfrak{Im}\, C_2^{*} = -0{,}000831.$$

Zahlentafel 3

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$-\pi N f_{s2}$	+0,14000	+0,12860	+0,09703	+0,05412	+0,01571	0
w^s_{22}	−0,14073	−0,12843	−0,09597	−0,05496	−0,01830	0
$-\pi N \varphi_{s2}$	−0,34000	−0,31982	−0,25834	−0,16090	−0,05721	0
$(\partial w^s_2/\partial \eta_2)_2$	+0,34115	+0,31922	+0,25787	+0,16253	+0,05354	0
$-\pi N f_{a2}$	0	+0,01076	+0,01502	+0,01086	+0,00324	0
w^a_{22}	0	−0,01028	−0,01576	−0,01055	−0,00215	0
$-\pi N \varphi_{a2}$	0	−0,02808	−0,03493	−0,01291	+0,01524	0
$(\partial w^a_2/\partial \eta_2)_2$	0	+0,03605	+0,02301	+0,01503	+0,01724	0

Die Zahlentafel 3 gibt einen Einblick in die Größe der Fehler. Während w^s_{22}, $(\partial w^s_2/\partial \eta_2)_2$ und w^a_{22} in recht befriedigender Weise die entsprechenden gegebenen Randwerte f_{s2}, φ_{s2} und f_{a2} zum Verschwinden bringen, fallen die starken Unterschiede bei $-\pi N \varphi_{a2}$ und $(\partial w^a_2/\partial \eta_2)_2$ auf. Das liegt daran, daß die Funktion $-\pi N \varphi_{a2}$ zwischen $\xi_2 = 0$ und $\xi_2 = 1$ bzw. $\xi_2 = 0$ und $\xi_2 = -1$ ihr Vorzeichen wechselt (Abb. 8). Diese starke Schwankung kann aber durch die zweite Näherung des Antimetriefalles noch nicht gut genug angeglichen werden. Die dritte Näherung, deren Rechnung hier im einzelnen nicht wiedergegeben ist, ergibt bessere Werte, die in Abb. 8 durch die gestrichelte Linie gekennzeichnet sind.

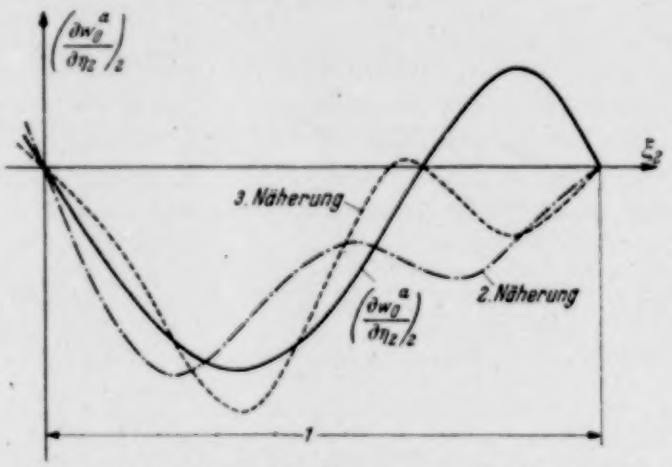

Abb. 8. Graphische Darstellung der antimetrischen Verdrehungen der Zahlentafel 3.

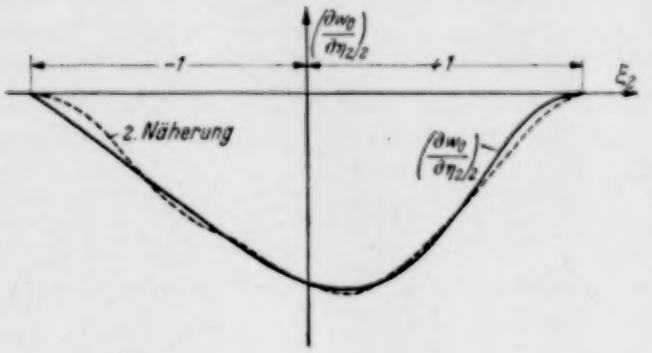

Abb. 9. Graphische Darstellung der Verdrehungen der Zahlentafel 4.

Zahlentafel 4

ξ	−1	−0,8	−0,6	−0,4	−0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$-\pi N f_2$	0	+0,01247	+0,04326	+0,08200	+0,11784	+0,14000	+0,13936	+0,11207	+0,06497	+0,01894	0
w_{22}	0	−0,01615	−0,04441	−0,08021	−0,11815	−0,14073	−0,13871	−0,11173	−0,06551	−0,02045	0
$-\pi N \varphi_2$	0	−0,07245	−0,14799	−0,22341	−0,29174	−0,34000	−0,34791	−0,29327	−0,17381	−0,04196	0
$(\partial w_2/\partial \eta_2)_2$	0	+0,03630	+0,14750	+0,23486	+0,28317	+0,34115	+0,35527	+0,28088	+0,17756	+0,07078	0

Die eben besprochenen großen Fehler von $(\partial w^a_2/\partial \eta_2)_2$ werden allerdings sehr stark abgeschwächt, wenn man Symmetrie- und Antimetrieteile von f_2 und φ_2 addiert, weil die Antimetrieteile nur einen Bruchteil der Symmetrieteile ausmachen (Zahlentafel 4). Entscheidend für die Beurteilung der Brauchbarkeit der Rechnung sind aber allein die Unterschiede zwischen den gegebenen unsymmetrischen Funktionen $-\pi N f_2$ bzw. $-\pi N \varphi_2$ und ihren Annäherungen w_{22} bzw. $(\partial w_2/\partial \eta_2)_2$. Diese betragen überall mit Ausnahme der Nachbarschaft der Ecken nur wenige Prozent (Abb. 9). Die Differenzen an den Ecken haben auf die Form der endgültigen Fläche keinen wesentlichen Einfluß, wie bereits erörtert wurde.

Die Restwerte der Flächen w^s_2 und w^a_2 am gegenüberliegenden Rande r_4 sind klein und können vernachlässigt werden. Beabsichtigt man aber, auch sie zu beseitigen, so ist mit ihnen ebenso wie mit den Restwerten der Fläche w^s_3 am Rande r_1 zu verfahren.

Die einzelnen, eben berechneten Teilflächen werden mit w_0 zusammengesetzt; wobei die demselben Rand zugeordneten Konstanten der Symmetrie- bzw. Antimetrieteile vor ihrer Multiplikation mit den Flächen der Tafeln **A** und **B** addiert werden können, wodurch die Zusammensetzung übersichtlicher wird. Die Abb. 10 gibt ein Bild der gesuchten Einflußfläche in Schichtenlinien[1].

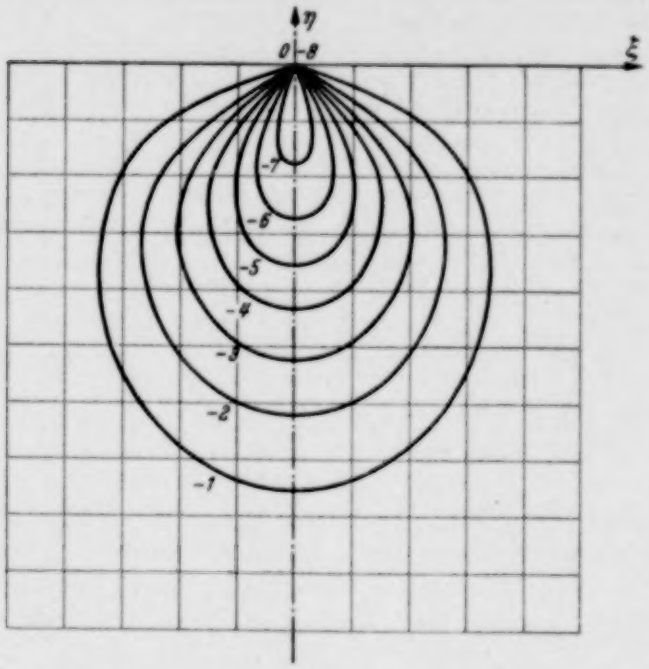

Abb. 10. Einflußfeld für das Stützmoment im Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ einer allseits eingespannten quadratischen Platte, $8\,\pi$-fach.

2) Das zweite Beispiel behandelt eine quadratische, gleichmäßig belastete Platte, bei der zwei Nachbarränder eingespannt und die beiden anderen drehbar gelagert sind.

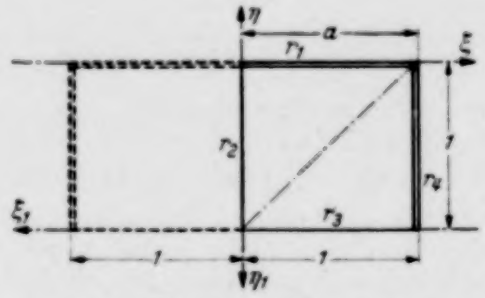

Abb. 11. Lage der Koordinatensysteme beim zweiten Beispiel.

Man ergänzt das in Abb. 11 mit ausgezogenen Linien dargestellte quadratische Plattenfeld nach der negativen Seite der ξ-Achse zu einer Platte mit den Abmessungen 2·1 und belastet sie antimetrisch zur Achse η mit der konstanten Last p. Auf diese Weise wird erreicht, daß längs $\xi = 0$ Durchbiegungen und Momente der zugehörigen Biegefläche verschwinden, und daß dort die Verhältnisse wie an einem drehbar gelagerten Rande herrschen. Die Gleichungen für w_0 sind

$$\left.\begin{aligned} \frac{24\,N}{p\,a^4}\,w_0 = \frac{24\,N}{p\,a^4}\,(w_p + w_e) &= \xi^4 + 0{,}5\,\xi - 1{,}5\,\xi^3 \qquad (\xi \geqq 0), \\ \frac{24\,N}{p\,a^4}\,w_0 = \frac{24\,N}{p\,a^4}\,(w_p + w_e) &= -\xi^4 + 0{,}5\,\xi - 1{,}5\,\xi^3 \qquad (\xi \leqq 0). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Es ist bei dieser Fläche $\partial w_0/\partial \eta = 0$. Mit Hilfe der Tafeln **Ba** und **Bb** erhält man nach Berechnung der Funktionen (17) in den Zehntelpunkten zwischen $\xi = -1$ und $\xi = 1$ die Integrale

$$Z_{1f}^* = 0{,}102642, \qquad Z_{2f}^* = -0{,}040437, \qquad Z_{1\varphi}^* = Z_{2\varphi}^* = 0$$

und die Konstanten

$$\Re\mathrm{e}\,C_1^* = -0{,}035174, \quad \Im\mathrm{m}\,C_1^* = -0{,}036931, \quad \Re\mathrm{e}\,C_2^* = -0{,}000798, \quad \Im\mathrm{m}\,C_2^* = -0{,}001998.$$

Zahlentafel 5

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
f_{a1}	0	0,08960	0,12960	0,10560	0,04160	0
w_{11}^a	0	−0,08937	−0,13005	−0,10516	−0,04205	0
φ_{a1}	0	0	0	0	0	0
$(\partial w_1^a/\partial \eta)_1$	0	+0,00136	−0,00202	+0,00257	−0,00376	0

Zahlentafel 5 zeigt die recht geringen Unterschiede der Randwerte der so berechneten Fläche w_1^a gegenüber den gegebenen der Fläche w_0.

Am Rande r_3 ($\eta = -1$) ist w_1^a durchzuschneiden. Da r_3 drehbar gelagert werden soll, erübrigt es sich gemäß den Erörterungen im Abschnitt **5**, für die durch den Schnitt frei gewordenen Randwerte neue Konstanten zu berechnen, wie es im ersten Beispiel bei den eingespannten

[1] Die Abb. 10 ist dem in Fußnote 2 von Seite 106 erwähnten Aufsatz von *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941), S. 91, entnommen.

Rändern erforderlich war. Es wird vielmehr der mit den gleichen Konstanten wie oben multiplizierte Teil der Antimetrieflächen, der zwischen $\eta=-1$ und $\eta=-2$ liegt (s. die Tafeln **B**), von dem zwischen $\eta=0$ und $\eta=-1$ liegenden entsprechenden Flächen abgezogen (s. Abb. 6), und zwar so, daß $\eta=-2$ mit $\eta=0$ zur Deckung kommt. Danach ist z. B. die aus w_1^a und $w_1^{a'}$ herrührende Durchbiegung im Punkte $\xi=0{,}2$, $\eta=0{,}4$

$$\tfrac{1}{2}(w_1+w_1') = -0{,}035174(-0{,}01013-0{,}00680)-0{,}036931(0{,}61270+0{,}00050)- \\ -0{,}000798(0{,}14454-0{,}00008)-0{,}001998(0{,}41346+0{,}00007).$$

Die Zahlen innerhalb der Klammern sind den Tafeln **Bc 1** und **Bc 2** entnommen.

Die Randwerte, die von $w_1^{a'}$ am Rande r_1 übrig bleiben, sind so klein, daß sie nicht mehr beseitigt zu werden brauchen.

Nunmehr ist der Rand r_3 der Fläche w_0 unter Zugrundelegung des Koordinatensystems (ξ_1, η_1) drehbar aufzulagern. Man verfährt im Prinzip genau wie beim Rande r_1. Die Durchbiegungen der Fläche w_0 sind bei r_3 die gleichen wie bei r_1, da w_0 eine Zylinderfläche ist, ferner ist auch $(\partial^2 w_0/\partial \eta_1^2)=0$. Man erhält

$$Z_{1f}^* = -0{,}102642. \qquad Z_{2f}^* = 0{,}040437, \qquad Z_{1\varphi}^* = Z_{2\varphi}^* = 0.$$

Die Vorzeichenänderung dieser Integrale gegenüber den entsprechenden am Rande r_1 ist auf die gedrehte Lage des Koordinatensystems (ξ_1, η_1) zurückzuführen. Nach Tafel **Bb II**, zweite Näherung ergibt sich

$$\mathfrak{Re}\, C_1^* = 0{,}010358, \quad \mathfrak{Im}\, C_1^* = 0{,}024620, \quad \mathfrak{Re}\, C_2^* = -0{,}000059, \quad \mathfrak{Im}\, C_2^* = 0{,}000444.$$

Beim Gebrauch aller Tafeln **B** des Antimetrieteils ist in bezug auf die Vorzeichen stets darauf zu achten, wie das jeweils gültige Koordinatensystem zu den Antimetrieflächen w_0 und w^a sowie den Ableitungen von w^a angeordnet ist.

Zahlentafel 6 gibt einen Überblick über die Genauigkeit der Rechnung.

Zahlentafel 6

ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
f_{a3}	0	0,08960	0,12960	0,10560	0,04160	0
w_{33}^a	0	−0,08927	−0,13019	−0,10538	−0,04061	0
φ_{a3}	0	0	0	0	0	0
$(\partial^2 w_3^a/\partial \eta_1^2)_3$	0	−0,00642	+0,00884	+0,09164	−0,03650	0

Am Rande r_1 hinterläßt der dort zu führende Schnitt durch w_3^a freie Durchbiegungen und Verdrehungen, die aus den Tafeln **Bc 1** und **Bc 2** bzw. **Bd 1** und **Bd 2** berechnet werden. Da r_1 einzuspannen ist, sind neue Integrale und Konstanten zu ermitteln. Diese sind

$$Z_{1f}^* = -0{,}003361, \qquad Z_{1\varphi}^* = 0{,}015082,$$
$$Z_{2f}^* = 0{,}000991, \qquad Z_{2\varphi}^* = -0{,}004966$$

und

$$\mathfrak{Re}\, C_1^* = 0{,}002971, \qquad \mathfrak{Im}\, C_1^* = 0{,}002038,$$
$$\mathfrak{Re}\, C_2^* = 0{,}000228, \qquad \mathfrak{Im}\, C_2^* = 0{,}000264.$$

Die zugehörige Fläche $w_3^{a'}$ kann am Rande r_3 ebenso „gespiegelt" werden, wie es bereits bei w_1^a geschehen ist, so daß man ohne neue Rechnung eine weitere Fläche $w_3^{a''}$ gewinnt.

Es sollen nun noch die Stützmomente und die Feldmomente längs einer Diagonalen parallel zu den Koordinatenachsen bestimmt werden. Die Gleichungen für die Biegungsmomente sind

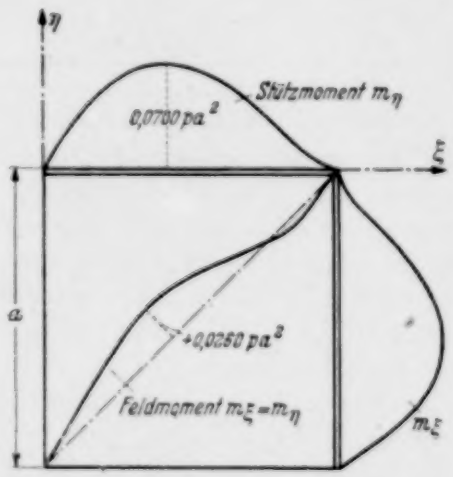

Abb. 12. Biegungsmomente einer gleichmäßig belasteten quadratischen Platte mit zwei benachbarten eingespannten und zwei drehbaren Rändern.

$$m_\xi = -\frac{N}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right), \qquad m_\eta = -\frac{N}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right).$$

Wie bereits eingangs erwähnt, wird $\nu=0$ gesetzt. Die Momente sind symmetrisch zu der in Abb. 12 eingezeichneten Diagonale. Es ist vorteilhafter, die Einspannmomente am Rande r_4 zu berechnen, weil hier genauere Werte als bei r_1 zu erwarten sind, denn bei r_4 erfüllen sämtliche Teilflächen die Randbedingungen identisch.

Die einzelnen Anteile, welche die verschiedenen Biegeflächen zu den Momenten beisteuern, und die Endergebnisse sind in Zahlentafel 7 und 8 zusammengestellt. Man kann alle Konstanten, die dem gleichen Rand zugeordnet sind, addieren und gewinnt auf diese Weise für das vorliegende Beispiel die beiden Gruppen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Re}\, C_1^* &= -0{,}035174 + 0{,}002971 = -0{,}032203, \\ \mathfrak{Im}\, C_1^* &= -0{,}036931 + 0{,}002038 = -0{,}034893, \\ \mathfrak{Re}\, C_2^* &= -0{,}000798 + 0{,}000228 = -0{,}000570, \\ \mathfrak{Im}\, C_2^* &= -0{,}001998 + 0{,}000264 = -0{,}001734 \end{aligned}\right\} \text{ zugehörig zu } r_1$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Re}\, C_1^* &= +0{,}010358, \quad & \mathfrak{Im}\, C_1^* &= 0{,}024620, \\ \mathfrak{Re}\, C_2^* &= -0{,}000059, \quad & \mathfrak{Im}\, C_2^* &= 0{,}000444 \end{aligned}\right\} \text{ zugehörig zu } r_3.$$

Bei der numerischen Berechnung der Momente ist wiederum den Vorzeichen der einzelnen Anteile besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Zahlentafel 7 (Stützmomente)

η	0	−0,2	−0,4	−0,6	−0,8	−1
aus w_0	−0,12500	−0,12500	−0,12500	−0,12500	−0,12500	−0,12500
aus $w_1^a + w_3^{a'}$	+0,13371	+0,09198	+0,05157	+0,02566	+0,01164	+0,00481
aus $w_1^{a'} + w_3^{a''}$	+0,00006	+0,00004	−0,00009	−0,00052	−0,00176	−0,00481
aus w_3^a	+0,00192	+0,00544	+0,01352	+0,03051	+0,06286	+0,11643
$m_{\xi s}$	0 (+0,01069)	−0,02754	−0,06000	−0,06935	−0,05226	0 (−0,00857)

Zahlentafel 8 (Feldmomente)

ξ	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
η	0	−0,2	−0,4	−0,6	−0,8	−1
aus w_0	−0,12500	−0,02000	+0,04500	+0,07000	+0,05500	0
aus $w_1^a + w_3^{a'}$	+0,13371	+0,01676	−0,02147	−0,02056	−0,00817	0
aus $w_1^{a'} + w_3^{a''}$	+0,00006	−0,00008	+0,00007	+0,00096	+0,00189	0
aus w_3^a	+0,00192	+0,00295	−0,00644	−0,02530	−0,03328	0
$m_{\xi f}$	0 (+0,01069)	−0,00037	+0,01716	+0,02510	+0,01544	0

Die Zahlentafel 7 enthält die Stützmomente m_ξ längs des Randes r_4, in der Zahlentafel 8 sind die Momente m_ξ längs der Diagonale ermittelt und in Abb. 12 aufgetragen. Es fällt in den beiden Tafeln auf, daß die Endsummen der Biegungsmomente in den Ecken nicht Null werden, was aber notwendig ist, weil die vier Ränder eine Ebene bilden. Die Abweichung hat ihre Ursache darin, daß längs r_1 und r_3 noch kleine Restdurchbiegungen verblieben sind, die wellenförmig verlaufen. Diese Wellen erzeugen Momente, deren Einfluß allerdings im Plattenfeld sehr bald verschwindet. Man kann daher sicher sein, daß die errechneten Biegungsmomente schon in geringer Entfernung von r_1 und r_3 ausreichend genau sind. Die sich aus der Rechnung ergebenden, von Null abweichenden Werte in den Ecken werden deshalb unterdrückt und an ihre Stelle die richtigen Werte gesetzt.

(Eingegangen am 23. April 1949.)

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. *Werner Koepcke*, (1) Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Lehrstuhl für Stahlbetonbau.

Nachtrag

zu meinem Aufsatz in Band XVII, S. 187 des Ingenieur-Archivs: „Die energetische Berechnung des induzierten Widerstandes".

Von **W. Kaufmann.**

Herr *E. Truckenbrodt*[1] hat mich freundlicherweise darauf aufmerksam gemacht, daß die in Abb. 3 meiner obigen Arbeit aufgetragene Funktion $\gamma^2/\eta = f(\eta)$ bei elliptischer Flügel-Auftriebsverteilung für $\eta \to 0$ nicht gegen ∞ geht, sondern einen endlichen Grenzwert besitzt.

Eine besondere Entwicklung in der Umgebung der Stelle $\eta = 0$ ist also in diesem Falle nicht notwendig. Der Ausdruck für den induzierten Widerstand lautet dann unter Zusammenfassung der beiden Anteile aus Gleichung (8) und (15) einfacher

$$W_i = \frac{\varrho \Gamma_0^2}{2\pi}\left(0{,}934 + \int_{\eta=0}^{\eta=1} \frac{\gamma^2}{\eta}\, d\eta\right), \tag{1}$$

wobei das Integral durch graphische Integration über den ganzen Bereich $0 \leqq \eta \leqq 1$ bestimmt werden kann. Obwohl sich dadurch an dem von mir mitgeteilten Zahlenwert praktisch nichts ändert — auch Herr *Truckenbrodt* berechnet nur eine einprozentige Abweichung gegenüber dem *Prandtl*schen Wert —, möchte ich nachstehend doch die von Herrn *Truckenbrodt* durchgeführte Grenzwertbetrachtung in etwas erweiterter Form wiedergeben, da sie mir für die Anwendung des Verfahrens von Bedeutung erscheint.

Unter Beachtung der Gleichungen (2) und (18) meiner Arbeit und nach Einführung der Abkürzung $c = (x_1 - x)/a$ kann Gleichung (17) wie folgt geschrieben werden:

$$\eta^2 = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 \left(\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2\right)$$

oder wegen (3)

$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2\right) \qquad (0 \leqq c \leqq 1).$$

Durch Differentiation nach c folgt daraus

$$\frac{d\eta}{dc} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+2c^2}} + 1\right) c}{\sqrt{\sqrt{1+2c^2} - 1 + c^2}}$$

und durch Grenzwertbildung

$$\left[\frac{d\eta}{dc}\right]_{c \to 0} = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

Nun wird wegen $c = (x_1 - x)/a$ und unter Beachtung von Gleichung (16) und (18) der obigen Arbeit

$$\lim_{\eta \to 0}\left(\frac{\gamma^2}{\eta}\right) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{c \to 0}\left(\frac{\gamma^2}{c}\right) = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \to b/2}\left(\frac{\gamma^2 \Gamma_x a}{\int_{\xi=x}^{\xi=b/2} \Gamma_\xi\, d\xi}\right)$$

$$= a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \to b/2}\left(\frac{\gamma_x^3}{\int_{\xi=x}^{\xi=b/2} \gamma_\xi\, d\xi}\right) = -a\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \lim_{x \to b/2}\left(\frac{\gamma_x^3}{\int_{\xi=b/2}^{\xi=x} \gamma_\xi\, d\xi}\right).$$

Da aber

$$\left(\frac{d(\gamma_x^3)}{dx}\right) = 3\gamma_x^2 \frac{d\gamma_x}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\int_{\xi=b/2}^{\xi=x} \gamma_\xi\, d\xi = \gamma_x,$$

so folgt

$$\lim_{\eta \to 0}\left(\frac{\gamma^2}{\eta}\right) = -\frac{3}{2}a\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\left[\frac{d(\gamma_x^3)}{dx}\right]_{x=b/2} = -1{,}395\, a\left[\frac{d(\gamma_x^2)}{dx}\right]_{x=b/2},$$

wobei $\gamma_x = \Gamma_x/\Gamma_0$ die dimensionslose Flügelzirkulation darstellt. Führt man noch die dimensionslosen Werte $\bar{x} = 2x/b$ und $\bar{a} = 2a/b$ ein, so erhält man schließlich den von Herrn *Truckenbrodt*

[1] Anschrift: Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, (20b) Braunschweig, Andreeplatz 5.

gefundenen Grenzwert

$$\lim_{\eta \to 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta} \right) = -1{,}395\, \bar{a} \left[\frac{d(\gamma_x^2)}{d\bar{x}} \right]_{(\bar{x}=1)} .$$

Im Falle elliptisch verteilter Flügelzirkulation $\gamma_x = \Gamma_x/\Gamma_0 = \sqrt{1-\bar{x}^2}$ wird unter Beachtung von (2a)

$$\lim_{\eta \to 0} \left(\frac{\gamma^2}{\eta} \right) = 2{,}79\, \bar{a} = 2{,}79\, \frac{\pi}{4} = 2{,}19 .$$

Herr *Truckenbrodt* hat darüber hinaus den induzierten Widerstand für elliptische, parabolische und dreiecksförmige Verteilung der Flügelzirkulation nach dem vorliegenden Verfahren berechnet und mit den entsprechenden Werten nach der *Prandtl*schen Theorie verglichen. Die Ergebnisse seiner Rechnung sind in der Tabelle und in nebenstehender Abbildung zusammengestellt. Aus der Tabelle ist die gute Übereinstimmung beider Theorien erkennbar.

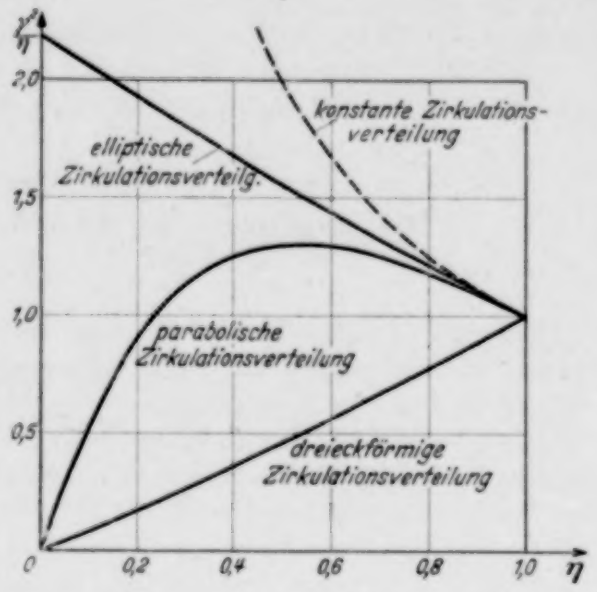

Abb. 1. Zuordnung $\frac{\gamma^2}{\eta}$ (η) für verschiedene Zirkulationsverteilungen.

Zirkulationsverteilung				Induz. Widerstand W_i	
	γ_x	$\bar{a}$	$\left[\frac{d(\gamma_x^2)}{d\bar{x}}\right]_{(\bar{x}=1)}$	*Prandtl*	*Kaufmann*
elliptisch	$\sqrt{1-\bar{x}^2}$	$\frac{\pi}{4}$	-2	$\frac{\pi^2}{8}\,\frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1{,}01\,\frac{\pi^2}{8}\,\frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$
parabolisch	$1-\bar{x}^2$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1{,}01\,\frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$
dreiecksförmig	$1-\bar{x}$	$\frac{1}{2}$	0	$\ln 2 \cdot \frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$	$1{,}01 \ln 2 \cdot \frac{\varrho \Gamma_0^2}{\pi}$

Bei beliebig vorgegebener, zwischen Ellipse und umbeschriebenem Rechteck liegender Zirkulationsverteilung kann man, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe[1], die Flügelzirkulation angenähert durch den Ausdruck darstellen

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \left[1 - \left(\frac{2x}{b} \right)^{\nu} \right]^{1/\nu},$$

wo $\nu > 2$. In diesem Falle geht $[\gamma^2/\eta]_{\eta=0} \to \infty$, so daß man zweckmäßig Gleichung (20) meiner obigen Arbeit benutzen wird.

Würde man dagegen, worauf Herr *Truckenbrodt* hinweist, die Zirkulationsverteilung durch den *Betz*schen Ansatz

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b} \right)^2} \sum_0^{\infty} A_n \left(\frac{2x}{b} \right)^n$$

darstellen, so würde sich $[\gamma^2/\eta]_{\eta=0}$ stets endlich ergeben, solange $\sum_0^{\infty} A_n \neq \infty$ wird. In diesem Falle würde die obige Gleichung (1) anzuwenden sein, da jetzt die graphische Integration über den ganzen Bereich $0 \leqq \eta \leqq 1$ keine Schwierigkeiten bereitet.

Die kritischen Bemerkungen des Herrn *Truckenbrodt* und die von ihm durchgerechneten Beispiele stellen eine wesentliche Ergänzung meiner Arbeit dar, für die ich ihm aufrichtigen Dank sage.

Zum Schluß möchte ich noch einen Druckfehler in meiner Arbeit richtigstellen. Auf S. 192 Zeile 3 muß es, wie man leicht feststellt, richtig heißen

$$\frac{[1-(1-\eta)^n]^{2/n}}{\eta} \approx n^{\frac{2}{n}}\, \eta^{\frac{2}{n}-1} .$$

[1] *W. Kaufmann.* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Mathem.-Naturwiss. Abt. 1946, S. 119.

(Eingegangen am 27. September 1949.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walter Kaufmann*, (13b) München, Technische Hochschule.

Theorie der Supraleitung

Von

Professor Dr. **M. von Laue**

Göttingen

Zweite Auflage

Mit 37 Textabbildungen. III, 115 Seiten. 1949

DMark 16.40

Einleitung.

Diese Schrift strebt die Klärung der Anschauungen über Supraleitung an, und zwar durch Ausdehnung der *Maxwell*schen Elektrodynamik auf die Supraleiter nach Ideen, welche *Fritz London* und *Heinz London* 1935 und später angegeben haben. Sie soll genau soweit gehen, wie diese Erweiterung die Tatsachen deutet. Wie groß der von ihr umfaßte Bereich ist, wird der Leser sehen. Aber darüber hinaus gibt es eine gewisse Zahl abweichender, dem klaren Verständnis bisher verschlossener Tatsachen. Wenn wir sie ignorieren, so berufen wir uns dabei auf *Clark Maxwell*, welcher die seit *Newton* wohlbekannte Dispersion des Brechungsindex nicht in seine elektromagnetische Lichttheorie einbaute, auf *Heinrich Hertz*, der in seiner Elektrodynamik der bewegten Körper den *Fresnel*schen Mitführungskoeffizienten nicht berücksichtigte, und auf jene Väter der Thermodynamik und Gastheorie, welche von der einfachen Zustandsgleichung $pV = RT$ ausgingen, obwohl sie wußten, daß diese eigentlich für kein Gas gilt. Die Theorie sucht sich eben der Wirklichkeit mittels sukzessiver Approximation zu nähern. Zudem haben wir bei mancher unerklärlichen Tatsache den Verdacht einer gewissen Unvollkommenheit des Versuchsmaterials. Der ideale feste Körper ist ein Einkristall; die meisten Supraleitungsversuche aber sind mit polykristallinem Material angestellt. Und selbst der beste Einkristall, den je ein Mensch in der Hand hatte, ist, wenn er ein paar Zentimeter groß ist, ein „Mosaik-Kristall", ein Gefüge aus vielen kleinen Kristalliten, an deren Grenzen das Raumgitter sich nicht stetig fortsetzt. Für die fast immer auftretenden Hysterese-Erscheinungen beim Übergang vom Supra- zum Normalleiter und umgekehrt kommt hinzu, daß man auch sonst bei tiefen Temperaturen und insbesondere bei festen Körpern häufig Verzögerungen findet, welche das theoretische Gleichgewicht zweier Phasen unter Umständen völlig verdecken. Schließlich ist manche der nicht gedeuteten Beobachtungen nur selten, vielleicht nur einmal gemacht, so daß Nachprüfung unter variierten Bedingungen notwendig erscheint, bevor man darüber nachdenkt. Die Supraleitung wurde 1911 entdeckt; aber trotzdem ist ihre Erforschung vielleicht über das Anfangsstadium noch nicht hinaus, weil das Experimentieren bei so tiefen Temperaturen schwierig und nur an wenigen Stellen möglich ist. Bewährt sich die im folgenden vertretene Theorie, so leistet sie für den Supraleiter dasselbe wie die ursprüngliche *Maxwell*sche Theorie für den Normal- und den Nichtleiter. Mehr will sie nicht.

Die atomare Theorie der Supraleitung scheint uns noch in keiner ihrer mannigfachen Formen so weit geklärt zu sein, daß wir sie in dieses Buch aufnehmen möchten. Immerhin steht wohl fest, daß der im Prinzip „ewige" Dauerstrom, den wir in einem supraleitenden Ringe herzustellen vermögen, das makroskopische Analogon zu jenen atomaren Dauerströmen darstellt, welche das *Bohr*sche Atommodell seit jeher im Innern der meisten Atome und Moleküle annimmt. In beiden Fällen liegen typische Quanteneffekte vor, die der älteren Physik unverständlich bleiben. Gerade in diesem unbestreitbaren experimentellen Nachweis solcher Quantenströme scheint mir das Hauptinteresse der Physik an der Erforschung der Supraleitung zu liegen. Dieses Buch aber soll zeigen, wie sich diese Strömung in die *Maxwell*sche Theorie einordnen läßt.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Destillier- und Rektifiziertechnik

Von

Dr. Ing. **Emil Kirschbaum**

Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe

Zweite Auflage

Mit 294 Abbildungen im Text und 23 Kurventafeln

XVI, 465 Seiten. 1950

DMark 45.—; Ganzleinen DMark 49.50

In diesem Buch werden Theorie und Praxis der Destillier- und Rektifiziertechnik knapp, klar und dem neuesten Stand der Wissenschaft entsprechend dargestellt. Es ist für den lernenden wie für den in der Praxis tätigen Ingenieur geschrieben, und seine besondere Stärke liegt in der glücklichen Vereinigung strenger Wissenschaftlichkeit mit ingenieurmäßiger Behandlung des gesamten Gebietes, das in jüngster Zeit an praktischer Bedeutung noch zugenommen hat.

Die erste Auflage (1940) war schon kurz nach Erscheinen vergriffen. Inzwischen haben weitere Forschungen, nicht zuletzt des Verfassers selbst und seiner Karlsruher Schule, eine Reihe von Lücken in der Erkenntnis geschlossen. Die zweite Auflage, die wegen zeitbedingter Schwierigkeiten erst jetzt veranstaltet werden konnte, unterscheidet sich daher nicht unwesentlich von der ersten. So ist die Theorie des gekoppelten Wärme- und Stoffaustauschs ausgebaut und vereinfacht, die u. a. für die Berechnung von Destillier- und Rektifizierapparaten und von Füllkörpersäulen von großer Bedeutung ist. Ferner haben die Vielstoffgemische gegenüber der ersten Auflage eine wesentlich eingehendere Behandlung erfahren. Beträchtlich erweitert wurde der Abschnitt über Füllkörpertechnik, und ganz neu aufgenommen ist eine Betrachtung über Sonderbauarten von Rektifizierböden.

So wird das Buch auch in der neuen Auflage seinen Rang als führendes Werk auf diesem Fachgebiet behaupten. Sein Wert für die Praxis wird noch dadurch gesteigert, daß der Umfang des Anhangs, in welchem in Tabellen und Kurven Gleichgewichtswerte für Zwei- und Dreistoffgemische und damit zusammenhängende physikalische Werte wiedergegeben werden, gegenüber der ersten Auflage auf ein Vielfaches angewachsen ist.

Inhaltsübersicht:

Allgemeines. – Theoretische Grundlagen. – Flüssigkeitstrennung durch einmalige Destillation. – Die Rektifiziersäule. – Der stetig arbeitende Rektifizierapparat mit Austauschböden. – Die Rektifikationsvorgänge im Wärmeinhalt-Konzentrationsbild. – Trennung von Gemischen mit mehr als zwei Bestandteilen. – Bestimmung der Abmessungen der Rektifiziersäule mit Austauschböden. Wirkung von Rektifizierböden. – Rektifikation in Füllkörpersäulen. – Flüssigkeitsinhalt einer Rektifiziersäule. – Ausführung von Einzel- und Zubehörteilen. – Anhang: Gleichgewichtswerte für Zwei- und Dreistoffgemische. – Namenverzeichnis. – Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.